التفاضل

وقوانينه ونظرياته



اليازوري

التفاضل وقوانينه ونظرياته

التفاضل وقوانينه ونظرياته

سلسلة الممتاز في الر ياضيات

التفاضل وقوانينه ونظرياته

تأليف

الطبعة الأولى

2003 م – 1424هـ

دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع – عمان

المحتويات

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله الكريم محمد صلى الله عليه وعلى آله وصحبه وسلم , الحمد لله الذي هدانا لهذا وما لنا لنهتدي لولا أن هدانا الله . الحمد لله على نعمة الاسلام ونعم من الله لا نحصيها وبعد ...

فبين يديك أخي القارئ كتاب " التفاضل " ضمن سلسلة الممتاز في الرياضيات الذي أردنا من اعداده رفد المكتبة العربية بالكتب العلمية والذي توخينا في تأليفه الدقة العلمية ووضوح الأسلوب وغايتنا من ذلك كله رضوان الله جل وعلا .

لقد بني هذا الكتاب على موضوع التفاضل في الرياضيات هذا بالإضافة إلى كون مادة الكتاب مرجعاً أساسياً للطالب والمعلم والباحث الذي يحتاج إلى استعمال مادة التفاضل في التدريس أوالتحليل .

إن هذا الكتاب يهدف إلى تسليط الضوء على موضوع التفاضل عن طريق تقديم مناقشة وشرح وافٍ للمادة بأسلوب واضح ولغة سليمة ومن ثم إعطاء المعادلات بشكل رياضي دقيق ويتبع ذلك أمثلة محلولة لها علاقة وثيقة بالحياة العملية .

لقد احتوى الكتاب على المواضيع التالية :-

التغير ومتوسط التغير , التفسير الهندسي والتفسير الفيزيائي لمتوسط التغير , كيفية إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف , الاتصال والاشتقاق , التفسير الهندسي للمشتقة الأولى (ميل المماس) التفسير الفيزيائي للمشتقة الأولى (السرعة اللحظية) , قواعد الاشتقاق , نتائج هامة لقواعد الاشتقاق , العلاقة بين الاتصال والاشتقاق , المشتقات العليا والمشتقة النونية , خطوات ايجاد المشتقة النونية للاقتران ق(س) , التعريف الفيزيائي للمشتقة , تعريف التسارع , المفهوم الفيزيائي للمشتقة وكيفية حل مسائله , التعريف الهندسي للمشتقة , المفهوم

الهندسي للمشتقة وكيفي حل مسائله , الاشتقاق الضمني , خطوات الاشتقاق الضمني , قاعدة لوبيتال , تطبيقات مثلثية على قاعدة السلسلة , مشتقة الاقترانات الدائرية , نظريات وقوانين وبراهين على حساب التفاضل .

كما تضمن الكتاب أسئلة تمارين للمراجعة .

ومن هذه المقدمة نرى احتواء الكتاب على المواضيع الهامة في التفاضل واننا نرحب بكل نقد بنّاء من أساتذتنا الكرام ومن أعزائنا الطلاب ونشكر كل من يرشدنا إلى تحسين مادة الكتاب بتصحيح خطأ أو اقتراح إضافة أو توضيح .

ندعو الله أن يكون عملنا هذا خالصاً لوجهه الكريم وأن نكون قد وفقنا لخدمة أمتنا وأن يكون عملنا هذا من العلم الذي ينفع به .

التفاضل

التغير ومتوسط التغير:

تعريف: التغير في س :(Δس):

إذا كانت القيمة الابتدائية للمتغير س هي $س_1$

وكانت القيمة النهائية للمتغير س هي $س_2$ فإن التغير في س ورمزه Δ س أو (هـ) يساوي:

Δس = هـ = $س_2$ − $س_1$ (Δس تعني دلتا س)

أي: Δس = قيمة س النهائية − قيمة س الابتدائية.

مثال: إذا كانت قيمة س الابتدائية تساوي 4.1 وتغيرت بمقدار −1,1 فاحسب قيمة س النهائية.

الحل:

$س_1$ = 4.1 ، Δس = 1,1

Δس = $س_2$− $س_1$

−1,1 = $س_2$ − 4.1 ⇐ $س_2$ = 4.1 ⇐ $س_2$ = 4.1 − 1,5= 3

تعريف التغير في ص : (Δص):

إذا كانت ص اقتراناً للمتغير س أي : ص = ق(س)

فإن تغير قيمة س من $س_1$ إلى $س_2$ سوف يعمل على تغيير قيمة ص من $ص_1$ إلى $ص_2$.

أي أن التغير في ص = Δص =$ص_2$−$ص_1$

= ق($س_2$) − ق(س)= Δص

أو = ق($س_1$+ هـ)− ق($س_1$)

مثال: إذا كان ص = ق(س) = $س^2$ وتغيرت قيمة س من $س_1$= 1 إلى $س_2$=3 فاحسب: 1) Δس 2) Δص.

الحل:

1) هـ= Δس = $س_2$−$س_1$ = 3−1 = 2

2) $ص_1$ = ق($س_1$) = ق(1) = (1) = 2(1) = 1

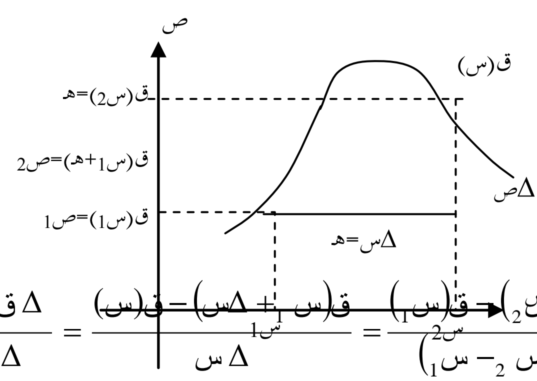
$ص_2$ = ق($س_2$) = ق(3) = $(3)^2$ = 9

∴ Δص = $ص_2$−$ص_1$ = 9−1 = 8 .

تعريف: متوسط التغير $\left(\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}\right) = \frac{\text{ق(س + هـ) − ق(س)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ق(ع) − ق(س)}}{\text{ع − س}}$ ، هـ $\neq 0$ ع− س $\neq 0$

الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران ق(س) موضحاً عليه التغير في ص عندما تتغير س من س1 إلى س2.

متوسط التغير في الاقتران ص عندما تتغير س من س1 إلى س2 يعبر عنه كما يلي:



$$\left(\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}\right) = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق(س}_2\text{) − ق(س}_1\text{)}}{\text{(س}_2 - \text{س}_1\text{)}} = \frac{\text{ق(س}_1 + \Delta\text{س) − ق(س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}}$$

إذا رمزنا للمقدار Δ س بالرمز هـ فإن:

متوسط التغير $= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(س}_1 + \text{هـ) − ق(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ ، هـ $\neq$ صفر

متوسط التغير = $\frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$

مثال: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{\text{س}} & ، 0 \le \text{س} < 1 \\ 5 - 2\text{س} & ، 1 \le \text{س} \le 5 \end{cases}$ فجد متوسط التغير في ق عندما تتغير س من س$_1$ =1 إلى س$_2$ = 0.64 .

الحل:

س$_1$ = 1 ⇐ ص$_1$ = ق(1) = 5−2(1) = 5−2 = 3

س$_2$ = 0.64 ⇐ ص$_2$ = ق(0.64) = $\sqrt{0.64}$ = 0.8

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{0.8 - 3}{0.64 - 1} = \frac{-2.2}{-0.36} = \frac{220}{36} = \frac{55}{9}$$

مثال: إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}} - \sqrt[3]{\text{س}}$ تغيرت س من (1) إلى (64) أوجد متوسط التغير.

الحل:

متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(64) - \text{ق}(1)}{64 - 1} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{64} - \sqrt{64}\right) - \left(\sqrt[3]{1} - \sqrt{1}\right)}{63} = \dfrac{(4-8) - (0)}{63}$

$= \dfrac{4}{63}$

نلاحظ أن:

- متوسط تغير الاقتران الثابت = صفر دائماً
- متوسط تغير الاقتران الخطي = معامل س دائماً

مثال: ليكن ق(س) = 6س−3س^2 تغير س بمقدار هـ أوجد متوسط التغير بدلالة س،هـ ثم أوجد ذلك عند س = 3 هـ = −2 .

الحل:

متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \dfrac{6(\text{س} + \text{هـ}) - 3(\text{س} + \text{هـ})^2 - \left(6\text{س} - 3\text{س}^2\right)}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{6\text{س} + 6\text{هـ} - 3\left(\text{س}^2 + 2\text{هـ س} + \text{هـ}^2\right) - 6\text{س} + 3\text{س}^2}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{6\text{س} + 6\text{هـ} - 3\text{س}^2 - 6\text{هـ س} - 3\text{هـ}^2 - 6\text{س} + 3\text{س}^2}{\text{هـ}} = \dfrac{6\text{هـ} - 6\text{هـ س} - 3\text{هـ}^2}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{\text{هـ}\left(6 - 6\text{س} - 3\text{هـ}\right)}{\text{هـ}} = 6 - 6\text{س} - 3\text{هـ}$ وعند س = 3، هـ = −2 فإنه $6 - 18 + 6 = -6$

مثال: صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها طول ضلعها زاد من 5 سم إلى 5.1 سم، فجد مقدار التغير في مساحتها بالسم^2.

الحل:

نفرض طول ضلع المربع س ⇐ اقتران المساحة م(س) = س^2

Δ م (س) = $(5.1)^2 - (5)^2$ = 26.1 − 25 = 1.1 سم^2

مثال: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [2\text{س} + 1] & ،\ \text{س} \geq \frac{1}{4} \\ \left|3\text{س} - \frac{1}{2}\right| & ،\ \text{س} < \frac{1}{4} \end{cases}$

فاحسب متوسط تغير ق إذا كانت $س_1 = \frac{1}{2}$ ، $\Delta س = \frac{-1}{4}$

الحل:

$س_1 = \frac{1}{2}$ ، $س_2 = س_1 + \Delta س = \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$$= \frac{\Delta ق(س)}{\Delta (س)} = \frac{ق\left(\frac{1}{4}\right) - ق\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{4}} = \frac{\left[2\left(\frac{1}{4}\right)+1\right] - \left|3\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|}{\frac{-1}{4}}$$

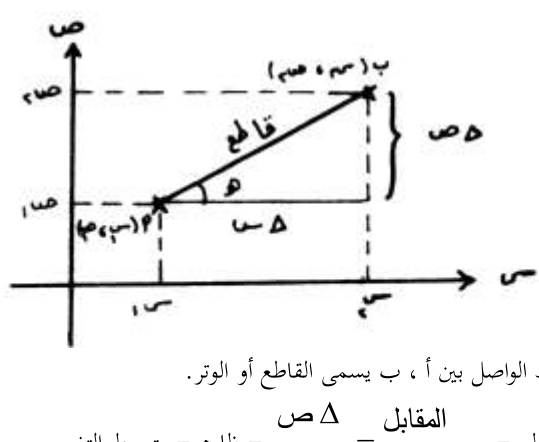
$$= \frac{[1.5] - |1|}{\frac{-1}{4}} = \frac{1-1}{\frac{-1}{4}} = \text{صفر}$$

التفسير الهندسي والتفسير الفيزيائي لمتوسط التغير:

أولاً: التفسير الهندسي (ميل القاطع):

إذا تحرك جسيم (أو نقطة) في المستوى البياني من النقطة أ ($س_1$،$ص_1$) إلى النقطة ب($س_2$،$ص_2$) كما في الشكل:

هـ : الزاوية بين القاطع ومحور السينات الموجب



فإن الخط الواصل بين أ ، ب يسمى القاطع أو الوتر.

ميل القاطع = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ظا هـ = متوسط التغير

هندسياً متوسط التغير = ميل القاطع = ظا هـ

مثال: إذا كان ق(س)= |5س−2| ، فجد ميل الخط الواصل بين النقطتين (1،ق(1))، (−2،ق(−2)).

الحل:

$$\frac{ق(-2)-ق(1)}{-2-1} = \frac{|5(-2)-2| - |5(1)-2|}{3} = \frac{|-12|-|3|}{-3} = \frac{12-3}{-3} = -3$$

ثانياً: التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير (السرعة المتوسط ع):

إذا تحرك جسيم (أو نقطة) من الموقع ف ($ن_1$) إلى الموقع ف ($ن_2$) خلال الفترة Δن = $ن_2 - ن_1$ حسب اقتران المسافة (ن) فإن متوسط التغير في الاقتران ف(ن) = $\frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{\Delta ن}$ = السرعة المتوسطة ع .

إذن فيزيائياً متوسط التغير = متوسط السرعة = $\frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{\Delta ن}$

حيث ف($ن_1$) موقع الجسيم في اللحظة $ن_1$ ، ف ($ن_2$) موقع الجسيم في اللحظة $ن_2$

مثال: تتحرك نقطة على خط الأعداد بحيث أن بعدها ف عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف(ن) = $\frac{ن^3}{ن+2}$ ،

جد:

1- التغير في موقع النقطة خلال ثانيتين إذا بدأ من السكون.

2- متوسط سرعة النقطة خلال الفترة المذكورة.

الحل:

1- التغير في الموقع = Δ ف = ف(2)- ف(0) = $\frac{(2)^3}{2+2} = \frac{8}{4} = 2$ متر

2- متوسط السرعة ع′ = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{2}{2} = 1$ م/ ثانية

تعريف المشتقة: إذا كان الاقتران ص = ق(س) المعرف على [أ،ب] فإننا نعرف المشتقة الأولى للاقتران بأنها اقتران آخر ق س قيمته في أي نقطة س ∋(أ ،ب) أي:

نعرف ص بأنها : $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{ق(س + \Delta س) - ق(س)}{\Delta س}$ بشرط وجود هذه النهاية، وأهم،

شكلان نستخدمها لتعريف المشتقة.

1- $ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

2- $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

مثال: ليكن ق(س) = $س^3$–س أثبت أن ق $(س)' = 3س^2-1$ باستخدام التعريف:

الحل:

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^3 - ع - (س^3 - س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^3 - س^3 - (ع - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^2 + ع س + س^2) - (ع - س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^2 + ع س + س^2 - 1)}{ع س} = \lim_{ع \to س} ع^2 + ع س + س^2 - 1$$

$= س^2 + س^2 + س^2 - 1 = 3س^2 - 1$

ملاحظات هامة:

1- المشتقة الأولى ق(س) هي اقتران ناتج عن أخذ النهاية لمتوسط التغير عندما Δ س← صفر .

2- يرمز للمشتقة الأولى بأحد الرموز: ق $(س)'$، $ص'$ ، $\frac{دص}{دس}$ ، $\frac{دق(س)}{دس}$

3- يمكن أن تكتب صيغة تعريف المشتقة الأولى كما يلي:

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$ ، حيث ع = س + هـ .

4- يطلق على المشتقة الأولى أحياناً معدل التغير.

5- إذا كانت النهاية (حسب تعريف المشتقة الأولى) موجودة عند س = $س_1$ نقول أن الاقتران قابل للاشتقاق عند س = $س_1$ وإذا كانت النهاية غير موجودة نقول أن الاقتران قابل للاشتقاق عند س=$س_1$ (وجود النهاية يتحدد كما درسته سابقاً أي النهاية عند اليمين = النهاية عند اليسار) .

6- الرمز ق'₊(أ) يمثل المشتقة الأولى عند يمين العدد أ   إذا كان ق'₊(أ) = ق'₋(أ) ⇐

الرمز ق'₋(أ) يمثل المشتقة الأولى عند يسار العدد أ   ∴ ق' (أ) موجودة.

7- يرمز للمشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س= أ بالرموز:

ق' (أ) ، $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=أ}$

كيفية إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف:

1- إذا كان المطلوب ق'(أ) أي المشتقة الأولى عند قيمة محددة (س =أ) نعوّض عند س بالعدد أ في صيغة

التعريف فتصبح ق'(أ) = $\underset{هـ\leftarrow 0}{نها} \frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ}$ وبعد إيجاد ق(أ+هـ)، ق(أ) بالتعويض نجد النهاية

(كما درسناها للاقتران النسبي) ونعوّض عن هـ بالصفر والقيمة الناتجة هي ق'(أ)

2- إذا كان الاقتران يغير قاعدته حول العدد أ فيجب أن نحسب المشتقة عن اليسار وعن اليمين

(ق'₋(أ)، ق'₊(أ)) فإذا كانت ق'₋(أ) = ق'₊(أ) فتكون بذلك ق' (أ) موجودة (كما في حالة الاقتران المتشعب).

3- إذا كان المطلوب المشتقة الأولى للاقتران ق بشكل عام أي المطلوب إيجاد الاقتران ق'(س) فنجد النهاية بالتعريف بدلالة س.

من الأمثلة القادمة ستلاحظ أن الاقترانات متعددة القواعد واقتران القيمة المطلقة واقتران أكبر عدد صحيح سيكون لكل فترة فيها (حسب قاعدتها) قاعدة تمثل ق'(س)؛ أي أن الاقتران متعدد القواعد اقتران مشتقته الأولى اقتران متعدد القواعد أيضاً. وليس شرطاً أن يكون ق' (س) متصلاً إذا كان ق(س) متصلاً.

مثال: باستخدام تعريف المشتقة الأولى ابحث قابلية الاقتران ق(س) = | س | للاشتقاق عند س = صفر.

الحل:

نعيد أولاً تعريف الاقتران ق(س) = | س |

$$|س| = \begin{cases} -س & ، \quad س < صفر \\ س & ، \quad س \geq صفر \end{cases}$$

نلاحظ أن س = صفر هي نقطة تشعب لذلك نجد المشتقة عن يمين وعن يسار العدد صفر.

$$\bar{ق}_{-}(0) = \underset{هـ\to 0^-}{نها} \frac{ق(0+هـ) - ق(0)}{هـ} = \underset{هـ\to 0^-}{نها} \frac{-(0+هـ) - (-(0))}{هـ} = \underset{هـ\to 0}{نها} \frac{-هـ}{هـ} = \underset{هـ\to 0^-}{نها} -1 = -1$$

$$\bar{ق}_{+}(0) = \underset{هـ\to 0^+}{نها} \frac{ق(0+هـ) - ق(0)}{هـ} = \underset{هـ\to 0^+}{نها} \frac{+(0+هـ) - (0)}{هـ} = \underset{هـ\to 0^+}{نها} \frac{هـ}{هـ}$$

$$= \underset{هـ\to 0^+}{نها} 1 = 1$$

بما أن $\bar{ق}_{-}(أ) \neq \bar{ق}_{+}(أ) \Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س = صفر.

مثال: إذا كان م(س) $= \frac{2}{\sqrt[3]{س+5}}$ أوجد من التعرف $\bar{م}(3)$

الحل:

$$\bar{م}(س) = \underset{ع\to س}{نها} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} \Leftarrow \bar{م}(3) \underset{ع\to 3}{نها} \frac{م(ع) - م(3)}{ع - 3}$$

$$\therefore \bar{م}(3) = \underset{ع\to 3}{نها} \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{ع+5}} - \frac{2}{\sqrt[3]{3+5}}}{ع - 3} = \underset{ع\to 3}{نها} \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{ع+5}} - \frac{2}{2}}{ع - 3}$$

$$\therefore \underset{ع\to 3}{نها} \frac{2 - \sqrt[3]{ع+5}}{\sqrt[3]{ع+5}} \times \frac{1}{ع - 3}$$ وبضرب البسط والمقام في المرافق التكعيبي للبسط

$$\therefore \bar{م}(3) \underset{ع\to 3}{نها} \frac{2 - \sqrt[3]{ع+5}}{\sqrt[3]{ع+5} \times (ع-3)} \times \frac{4 + 2\sqrt[3]{ع+5} + \sqrt[3]{(ع+5)^2}}{4 + 2\sqrt[3]{ع+5} + \sqrt[3]{(ع+5)^2}}$$

$$= \underset{ع\to 3}{نها} \frac{8 - (ع+5)}{\sqrt[3]{ع+5} \times (ع-3)\left(4 + 2\sqrt[3]{ع+5} + \sqrt[3]{(ع+5)^2}\right)}$$

$$=\underset{\text{ع}\to 3}{\text{نها}}\ \frac{3-\text{ع}}{\sqrt[3]{\text{ع}+5}\times(\text{ع}-3)\left(4+2\sqrt[3]{\text{ع}+5}+\left(\sqrt[3]{\text{ع}+5}\right)^2\right)}=\frac{-1}{2\times(4+4+4)}=\frac{-1}{24}$$

ملاحظة: لإيجاد مشتقة الاقترانات المتشعبة عند نقاط التشعيب باستخدام التعريف، نجد المشتقة من اليمين والمشتقة من اليسار فإذا تساوتا نقول بوجود المشتقة، وإذا لم تتساويا نقول بعدم وجود المشتقة.

مثال: ليكن هـ(س) = س^{2}ل(س)، ك(1) = 2ل = 8 أوجد هـ̄ (1) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل:

$$\bar{\text{هـ}}(\text{س})=\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}}\frac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}\Leftarrow \bar{\text{هـ}}(1)=\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(1)}{\text{ع}-1}$$

$$=\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{ع}^2}{\text{ل}(\text{ع})}-\frac{1}{\text{ل}(1)}}{\text{ع}-1}=\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{ع}^2\times\text{ل}(1)-\text{ل}(\text{ع})}{\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)}}{\text{ع}-1}$$

$$=\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{ع}^2\times\text{ل}(1)-\text{ل}(\text{ع})}{\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)}}{\text{ع}-1}=\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{ع}^2\times\text{ل}(1)-\text{ل}(\text{ع})}{(\text{ع}-1)\left(\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)\right)}$$

وبالإضافة وطرح المقدار ع^2 × ل(ع) إلى البسط فإن:

$$\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{ع}^2\text{ل}(1)-\text{ل}(\text{ع})+\text{ع}^2\text{ل}(\text{ع})-\text{ع}^2\text{ل}(\text{ع})}{(\text{ع}-1)\left(\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)\right)}=$$

$$\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{ع}^2\text{ل}(1)-\text{ع}^2\text{ل}(\text{ع})}{(\text{ع}-1)\left(\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)\right)}+\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{ع}^2\text{ل}(\text{ع})-\text{ل}(\text{ع})}{(\text{ع}-1)\left(\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)\right)}=$$

$$\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{ع}^2}{\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)}\times\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{ل}(1)-\text{ل}(\text{ع})}{\text{ع}-1}+\underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}}\frac{\text{ل}(\text{ع})}{\text{ل}(\text{ع})\times\text{ل}(1)}\times\frac{(\text{ع}-1)(\text{ع}+1)}{\text{ع}-1}$$

$$\frac{1}{\text{ل}(1)\times\text{ل}(1)}\times-\bar{\text{ل}}(1)+\frac{2}{\text{ل}(1)}=\frac{-4}{8\times 8}+\frac{2}{8}=\frac{-1}{16}+\frac{4}{16}=\frac{3}{16}$$

الاتصال والاشتقاق:

نظرية: إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق عند النقطة س = $س_1$ ، فإنه يكون متصلاً عند هذه النقطة.

يعني أن الاقتران القابل للاشتقاق عند نقطة يكون متصلاً عندها، وهذا يماثل قولنا: إذا كان ق(س) غير متصل عند نقطة فإنه غير قابل للاشتقاق عندها.

مثال: إذا كان ق(س) = $س^2$ [س] فهل ق متصل عند س = صفر وهل ق (0) موجودة؟

الحل:

$$\text{ق(س)} = \text{س}^2 [\text{ س }] = \begin{cases} \text{س}^2(-1) & ، \; -1 \le \text{س} < 0 \\ \text{س}^2(0) & ، \; 0 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\text{س}^2 & ، \; -1 \le \text{س} < 0 \\ \text{صفر} & ، \; 0 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

نبحث الاتصال:

$$\lim_{\text{س} \to 0^-} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to 0^-} -\text{س}^2 = -(0)^2 = \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{س} \to 0^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to 0^+} \text{صفر} = \text{صفر} \quad \Leftarrow \quad \lim_{\text{س} \to 0} \text{ق(س)} = \text{صفر}$$

بما أن $\lim_{\text{س} \to 0} \text{ق(س)} = \text{ق}(0)$ $\Leftarrow$ ق متصل عند س = صفر

نبحث الاشتقاق عند س = صفر:

$$\text{ق}'_-(0) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{ق}(0+\text{هـ}) - \text{ق}(0)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{-(0+\text{هـ}^2) - 0}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{-\text{هـ}^2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} -\text{هـ} = \text{صفر}$$

$$\text{ق}'_+(0) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{ق}(0+\text{هـ}) - \text{ق}(0)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{0-0}{\text{هـ}} = \text{صفر}$$

بما أن $\text{ق}'_-(0) = \text{ق}'_+(0) \Leftarrow \text{ق}'(0) \Leftarrow$ موجودة وتساوي صفر

مثال: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = 3 فابحث اتصاله عند س = 3 .

الحل:

بما أن ق قابل للاشتقاق عند س = 3 $\Leftarrow$ ق متصل عند س = 3 .

ملاحظة: عكس النظرية ليس صحيحاً دائماً، أي ليس كل اقتران متصل قابلاً للاشتقاق، مثل الاقتران ق(س) = |س| متصل عند س = صفر، لكن ق′ (0) غير موجودة.

البرهان: أثبت أنه إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = أ فإنه يكون متصلاً عند س = أ

المطلوب أن نثبت أن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$

ق(أ) موجودة لأن ق قابل للاشتقاق عند س = أ من الفرض

$$\text{ق(س)} - \text{ق(أ)} = \text{ق(س)} - \text{ق(أ)} \times \frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}} \quad ،\ \text{س} \neq \text{أ}$$

بأخذ النهاية: $$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} - \text{ق(أ)} = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{س} - \text{أ}} \times (\text{س} - \text{أ}) \right)$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} - \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(أ)} = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(أ)}}{\text{س} - \text{أ}} \times \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ (\text{س} - \text{أ})$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} - \text{ق(أ)} = \text{ق}'(\text{أ}) \times (\text{أ} - \text{أ})$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} - \text{ق(أ)} = \text{صفر}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$$

وهذا هو شرط الاتصال.

ملاحظة: مشتقة اقتران أكبر عدد صحيح غير موجودة عند نقاط الانفصال (عدم الاتصال)، أما عند أي نقطة أخرى معرّف عليها الاقتران المشتقة الأولى تساوي صفر.

فإذا كان ق(س) = [س] $\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{صفر} & ،\ \text{س} \notin \text{ص} \\ \text{غير موجودة} & ،\ \text{س} \in \text{ص} \end{cases}$

مثال: إذا كان ق(س) = $\left[2 - \frac{1}{4}\text{س} \right]$ فجد $\overline{\text{ق}(16)}$ ، ق$(\overline{3})$.

الحل:

عند س = 16 : $2 - \frac{1}{4}(16) = -2 \in \text{ص} \Leftarrow \text{ق}'(16)$ غير موجودة

عند س = 3 : $2 - \frac{1}{4}(3) = \frac{5}{4} \notin \text{ص} \Leftarrow \text{ق}'(3)$ = صفر

مثال: إذا كان ق(س) = |س-3| فهل ق قابل للاشتقاق عند س = 3.

الحل:

نبحث أولاً اتصال الاقتران عند س = 3

بإعادة تعريف ق : $|\text{س} - 3| = \begin{cases} 3 - \text{س} & \text{، س} < 3 \\ \text{س} - 3 & \text{، س} \geq 3 \end{cases}$

$$\lim_{\text{س} \to 3^-} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to 3^-} 3 - \text{س} = 3 - 3 = \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{س} \to 3^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to 3^+} \text{س} - 3 = 3 - 3 = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to 3} \text{ق(س)} = \text{صفر}$$

ق(3) = صفر ، بما أن ق(3) = $\lim_{\text{س} \to 3} \text{ق(س)}$ $\Leftarrow$ ق متصل عند س = 3

هذا لا يعني بالضرورة أن ق′(3) موجودة؛ لذا ندرس قابلية الاشتقاق عند س = 3.

$$\text{ق}'_-(3) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{ق}(3 + \text{هـ}) - \text{ق}(3)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{3 - (3 + \text{هـ}) - 3 + 3}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{-\text{هـ}}{\text{هـ}} = -1$$

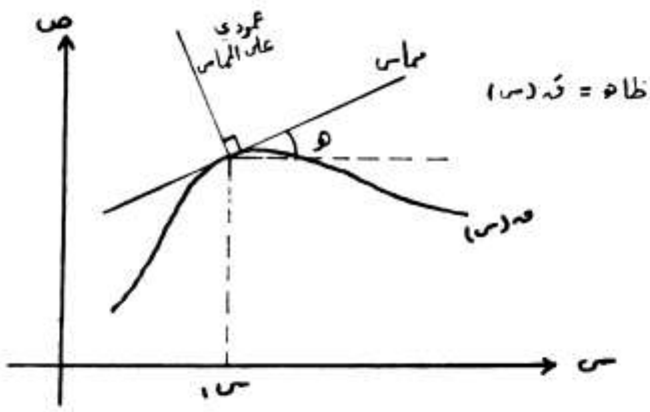
$$\text{ق}'_+(3) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{ق}(3 + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{هـ})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{(3 + \text{هـ}) - 3 - 3 + 3}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = 1$$

بما أن $\text{ق}'_-(3) \neq \text{ق}'_+(3)$ $\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س = 3.

التفسير الهندسي للمشتقة الأولى :ميل المماس (م) :

ق′($س_1$) تمثل ميل المماس لمنحنى ق عند س = $س_1$ بشرط أن يكون ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = $س_1$ ،

لاحظ الرسم:



$ق'(س_1)$ = ميل المماس =ظل الزاوية بين المماس ومحور السينات الموجب لاحظ أن ميل المماس الذي يوازي محور السينات = صفر لأن ظا o = صفر.

نلاحظ:

1- معادلة المماس لمنحنى ق في النقطة $(س_1، ق(س_1))$ هي:

$$ص - ق(س_1) = ق'(س_1)\ (س - س_1)$$

2- ميل العمودي على المماس = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{\bar{ق}(س_1)}$ ، $\bar{ق}(س_1) \neq$ صفر

فتكون معادلة العمودي على المماس:

$$ص - ق(س_1) = \frac{-1}{\bar{ق}(س_1)}(س - س_1)$$

مثال: للاقتران $ق(س) = س^2$ جد :

1- ظل الزاوية التي يصنعها المماس عند س = $\frac{1}{2}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، ما مقدار تلك الزاوية؟

2- الإحداثي السيني للنقطة التي تقع على منحنى $\dot{ق}$ والتي يكون المماس عندها أفقياً.

الحل:

1- وجدنا سابقاً أن مشتقة $س^2$ هي 2س.

$$\therefore\ \bar{ق}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = \text{ظا هـ} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{4}$$

2- ميل المماس الأفقي = صفر

ق̅ (س) = 2س = صفر ⇐ س = صفر

∴ يوجد مماس أفقي لمنحنى ق(س) = س^2 عند النقطة (0، 0)

التفسير الفيزيائي للمشتقة الأولى: (السرعة اللحظية):

المشتقة الأولى لاقتران المسافة بالنسبة للزمن تمثل السرعة اللحظية أي: إذا كان ف(ن) اقتران المسافة خلال الزمن ن فإن:

ف′ (ن$_1$) = ع(ن$_1$) = السرعة في اللحظة ن $_1$.

ملاحظة: يطلق على السرعة اللحظية أحياناً لفظ (السرعة) ع .

مثال: إذا تحرك جسيم على خط مستقيم وكان موقعة في اللحظة ن معرّفاً بالاقتران ف(ن) = ن^2 ، حيث ن : الزمن بالثواني، ف = المسافة بالأمتار. جد سرعة هذا الجسيم بعد ثانيتين نم بدء حركته.

الحل:

ف(ن) = ن^2

وجدنا سابقاً بالتعريف أن ف′(س) = 2ن

∴ السرعة عند (ن = 2) = ف′ (2) = 2(2) = 4 م /ث.

قواعد الاشتقاق:

القاعدة (1): إذا كان ق(س) = جـ (ثابت) فإن:

ق̅ (س) = صفر / أي أن مشتقة الثابت لوحده تساوي صفر.

مثال: ق(س) =جا^{2}س+جتا^{2}س⇐ ق′ (س)=صفر لأن جا^{2}س+جتا^{2}س=1/ متطابقة.

القاعدة (2): "إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق وعدد ثابت، وكان ل(س) = جـ×ق(س) فإن ل′(س) = جـ×ق′(س)" أي: مشتقة (ثابت × اقتران) = الثابت × مشتقة الاقتران.

مثال: إذا كان هـ(س) = 6ق(س) ، وكان ق′(2) = 3 فجد هـ′(2).

الحل:

هـ′ (س) = 6ق′(س)

هـ′ (2) = 6 ق′(2) = 6 × 3 = 18

قاعدة (3): "إذا كان ق(س) = $س^{ن}$، ن عدد نسبي فإن ق′(س) = ن × $س^{ن-1}$"

مثال: إذا كان ق(س) = $س^4$، فجد ق′(س) ، ق′ (1)

الحل:

ق′ (س) = $4س^3$

ق′(1) = $4(1)^3$ = 4

مثال: إذا كان ق(س) = $س^{-2}$ ، فجد ق′(0) .

الحل:

ق′ (س) = −2 × $س^{-2-1}$ = −2 $س^{-3}$

ق′(0) = −2 $(0)^{-3}$ = صفر

مثال: ق(س)= 8 $س^{\frac{1}{4}}$ أوجد ق′(16)

الحل:

ق′ (س) $8 \times \frac{1}{4}$ $س^{-\frac{3}{4}}$ = 2$س^{-\frac{3}{4}}$

$ق'(16) = 2 \times (16)^{-\frac{3}{4}} = 2 \times (2)^{-\frac{3}{4}} = 2 \times 2^{-3} = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

القاعدة (4): إذا كان ق(س) = ك(س) ± هـ(س) حيث ك′هـ′ موجودتين فإن

ق′(س) = ك′(س) ± هـ′(س) أي أن:

أ – مشتقة المجموع = مجموع المشتقات.

ب– مشتقة الفرق = الفرق بين المشتقات.

ملاحظة: تنطبق هذه القاعدة على أكثر من اقترانين.

مثال: إذا كان ق(س) = أ $س^3$ – 2ب $س^2$ – 4س + 10 ، وإذا كان

ق′ (2) = 2ق′(3) = −20 ما قيمة كل من أ، ب

الحل:

ق′(س) = 3أ$س^2$ – 4ب س −4

ق′ (2) = 12أ – 8ب – 4 = −20

∴ 12 أ – 8ب = −16

∴ 6 أ – 4ب = −8 .... (1)

كذلك ق′(3) = 27 أ – 12ب – 4 = −10 بالقسمة على (3)

∴ 9 أ − 4 ب = −2 .... (2)

من (1) ، (2) فإن 6أ − 4ب = −8

−9 أ ± 4ب = ±2

−3أ = −6 ← أ = 2 ومنها ب = 5

استنتاج :

إذا كانت ص = ق(س) = س4 فإن:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق}'(\text{س}) = 4\text{س}^3$$ ← تسمى المشتقة الأولى

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = \text{ق}''(\text{س}) = 12\text{س}^2$$ ← تسمى المشتقة الثانية

$$\frac{\text{د}^3\text{ ص}}{\text{د س}^3} = \text{ق}'''(\text{س}) = 24\text{س}$$ ← تسمى المشتقة الثالثة

$$\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{د س}^4} = \text{ق}''''(\text{س}) = 24$$ ← تسمى المشتقة الرابعة

$$\frac{\text{د}^5\text{ص}}{\text{د س}^5} = \text{ق}''''' = \textbf{صفر}$$ ← تسمى المشتقة الخامسة

وكذلك المشتقات التالية = صفر.

ملاحظة: يمكن أن نرمز للمشتقة الثانية بالرمز $\text{ق}^{(2)}$(س) والثالثة $\text{ق}^{(3)}$(س) والرابعة $\text{ق}^{(4)}$(س) وبصورة عامة $\text{ق}^{(\text{ن})}$(س) تسمى المشتقة النونية.

قاعدة (5): "إذا كان ق(س) = م(س) × ل(س)، حيث م ، ل اقترانان قابلان للاشتقاق عند س فإن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س ومشتقته ق′(س)= م(س) × ل′ (س) + ل(س) × م′ (س)" (مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول) .

مثال: إذا كان ق(س) = (3س^3 + س) (س^2-1) فجد ق′(س) ثم ق′(1).

الحل:

ق(س)= (3س^3+س) (س^2-1)

الاقتران الأول الاقتران الثاني

ق′ (س) = (3س^3+س) (2س) + (س^2-1) (9س^2+1)

= $6\text{س}^4 + 2\text{س}^2 + 9\text{س}^4 + \text{س}^2 - 9\text{س}^2 - 1 = 15\text{س}^4 - 6\text{س}^2 - 1$

ق′ (1) = 15(1)^4 − 6(1)^2 − 1 = 15 − 6 − 1 = 8

مثال: ليكن ق(س) = س(8−س) (س^2+4س) أوجد ق′ (2)

الحل:

نضع ق(س) = (8س−س^2) (س^2+4س)

ق′(س)= (8س−س^2) (2س+4) + (س^2 + 4س) (8−2س)

∴ ق′(2) = (16−4) (4+4) + (4+8) (8−4)

= 12 × 8 + 12 × 4 = 96 + 48 = 144 .

مثال: إذا كان ق(س) = س^3 × ك(س) ، ك(2) = 3 ك′ (2)= 6. أوجد ق′ (2) .

الحل: ق′ (س) =س^3 × ك′(س)+ ك(س) ×3س^2 ⇐ق′(2) = 8×ك′(2)+ك(2) ×12

= 8 × 2 + 6 × 12 = 16 + 72 = 88

مثال: إذا كان ق(س) = (4 − $\sqrt{\text{س}}$) ($\sqrt[3]{\text{س}}$ − 2) أوجد ق′(1)

الحل: نضع ق(س) = $\left(4-\text{س}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\text{س}^{\frac{1}{3}}-2\right)$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \left(4-\text{س}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\text{س}^{-\frac{2}{3}}\right)+\left(\text{س}^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(-\frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\text{ق}'(1) = (4-1)\left(\frac{1}{3}\times 1\right)+(1-2)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3\times\frac{1}{3} + -1\times -\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

القاعدة (6): مشتقة خارج قسمة اقترانين:

أ) مشتقة $\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right)$ **ب) مشتقة** $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}\right)$

أ) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{جـ}}{\text{هـ(س)}}$ هـ (س) ≠ صفر، هـ′ (س) موجودة فإن :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{جـ}\times\text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ(س)})^2} = \frac{\text{سالب الثابت}\times\text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

مثال: إذا كان ق(س) = $\frac{-6}{\text{س}^2+1}$ أوجد ق′(-1) .

الحل:

$$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{-(-6)\times 2\text{س}}{(\text{س}^2+1)^2} = \frac{12\,\text{س}}{(\text{س}^2+1)^2} \Leftarrow \text{ق}'(-1) = \frac{-12}{4} = -3$$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{10-3\text{س}}$ ، $\text{ق}'(2)=9$ ما قيمة الثابت أ .

الحل:

$$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{-\text{أ}\times -3}{(10-3\text{س})^2} = \frac{3\text{أ}}{(10-3\text{س})^2}$$

$$\therefore\ \text{ق}'(2) = \frac{3\text{أ}}{(10-6)^2} = 9 \Leftarrow \frac{3\text{أ}}{16} = 9 \Leftarrow \text{أ} = \frac{9\times 6}{3} = 48$$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = 8\text{س}^2 + \frac{3}{\text{س}}$ أوجد $\text{ق}'(1)$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = 16\text{س} - \frac{3}{\text{س}^2} \Leftarrow \text{ق}'(1) = 16 - \frac{3}{1} = 13$$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{3-2\text{ب}}{2\text{س}}$ وكان $\text{ق}''(2) = \frac{5}{2}$ ما قيمة الثابت ب.

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-(3-2\text{ب})\times 2}{4\text{س}^2} = \frac{2\text{ب}-3}{2\text{س}^2}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{-(2\text{ب}-3)(4\text{س})}{(2\text{س}^2)^2} = \frac{-4\text{س}(2\text{ب}-3)}{4\text{س}^4} = \frac{-(2\text{ب}-3)}{\text{س}^3}$$

$$\text{لكن } \text{ق}''(2) = \frac{-(2\text{ب}-3)}{8} = \frac{5}{2} \Leftarrow -(2\text{ب}-3) = \frac{5}{2}\times 8 = 20$$

$\therefore$ -2ب $+ 3 = 20 \Leftarrow -2$ب $= 17 \Leftarrow$ ب $= -8.5$.

تابع القاعدة السادسة

ب) مشتقة $\frac{م(س)}{هـ(س)}$

إذا كان ق(س) = $\frac{م(س)}{هـ(س)}$ ، م′ ، هـ′ موجودين هـ (س) ≠ صفر فإن:

$$هـ(س) = \frac{هـ(س) \times م'(س) - م(س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{2}}$$

أي أن $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

مثال: إذا كان م(2) = 5 ، م′(2) = 4 ، ك(2) = 3 ، ك′(2) = −2

اعتمد ذلك لإيجاد 1) $\left(\frac{م}{ك}\right)'(2)$ ، 2) $\left(\frac{م(2)}{ك(2)}\right)'$ ، 3) $\left(\frac{2ك - 1}{3م}\right)'(2)$

الحل:

1- $$\left(\frac{م}{ك}\right)'(2) = \frac{ك(2) \times م'(2) - م(2) \times ك'(2)}{(ك(2))^{2}}$$

$$= \frac{3 \times 4 - 5 \times -2}{(3)^{2}} = \frac{12 + 10}{9} = \frac{22}{9}$$

2- $\left(\frac{م(2)}{ك(2)}\right)' = \left(\frac{5}{3}\right)'$ = صفر لأن ما داخل القوس ثابت

3- $$\left(\frac{2ك - 1}{3م}\right)'(2) = \frac{3م(2) \times 2ك'(2) - (2ك(2) - 1) \times 3م'(2)}{(3م(2))^{2}}$$

$$= \frac{3 \times 5 \times 2 \times -2 - (2 \times 3 - 1)(3 \times 4)}{(3 \times 5)^{2}} = \frac{-60 - 60}{225} = \frac{-120}{225}$$

القاعدة (7): مشتقة ق(س) = $\sqrt{هـ(س)}$ ، هـ (س) ≥ 0، هـ′ (س) موجودة إذا كان ق(س) = $\sqrt{هـ(س)}$ فإن:

$$ق'(س) = \frac{هـ'(س)}{2\sqrt{هـ(س)}} = \frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$$

وهذه القاعدة خاصة بمشتقة الجذر التربيعي فقط.

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\frac{\text{س}+2}{\text{س}-1}}$ أوجد $\text{ق}'(2)$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{مشتقة}\left(\frac{\text{س}+2}{\text{س}-1}\right)}{2\sqrt{\frac{\text{س}+2}{\text{س}-1}}} = \frac{\frac{(\text{س}-1)\times 1-(\text{س}+2)\times 1}{(\text{س}-1)^2}}{2\sqrt{\frac{\text{س}+2}{\text{س}-1}}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-3}{(\text{س}-1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{\text{س}+2}{\text{س}-1}}} \Leftarrow \text{ق}'(2) = \frac{-3}{1}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{4}{1}}}$$

$$\therefore \text{ق}'(2) = -3\times\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

مثال: ك (5) = 4 ، ك′(5) = −2 وكان $\text{ن}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2\times\text{ك}(\text{س})}$ أوجد ن′ (5).

الحل:

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^2\times\text{ك}'(\text{س})+\text{ك}(\text{س})\times 2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2\times\text{ك}(\text{س})}}$$

$$\therefore \text{ن}'(5) = \frac{25\times\text{ك}'(5)+\text{ك}(5)\times 10}{2\sqrt{25\times\text{ك}(5)}} = \frac{25\times -2+4\times 10}{2\sqrt{25\times 4}}$$

$$= \frac{-10}{2\times 10} = \frac{-1}{2}$$

نتائج هامة على قواعد الاشتقاق:

1- مشتقة $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}\right) = \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت}}$

مثال: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^5-\text{س}^2}{7}$ ، فجد ق′(س).

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \frac{5\text{س}^4-2\text{س}}{4}$

2- مشتقة $\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right) = \frac{-\ \text{الثابت} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^{2}}$

مثال: إذا كان ص = $\text{ص} = \frac{5}{\text{س}^{3} - \text{س}}$ فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-5(3\text{س}^{2} - 1)}{(\text{س}^{3} - \text{س})^{2}} = \frac{-15\text{س}^{2} + 5}{(\text{س}^{3} - \text{س})^{2}}$

3- مشتقة $\left(\sqrt{\text{اقتران}}\right) = \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{2 \times \sqrt{\text{اقتران}}}$

مثال: إذا كان ق(س) = $\sqrt{7\text{س}^{3}}$ ، فجد ق′(س)

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{21\text{س}^{2}}{2\sqrt{7\text{س}^{3}}}$

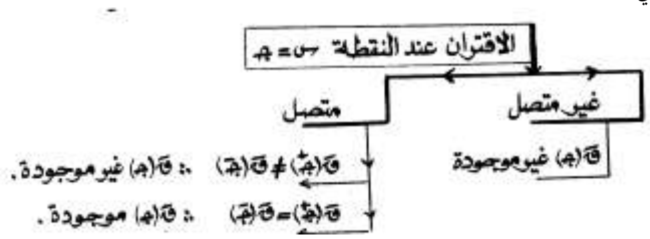
العلاقة بين الاتصال والاشتقاق:

1- إذا كان ق(س) متصلاً عند س = جـ فيمكن أن يكون قابلاً للاشتقاق عند س = جـ ويمكن أن لا يكون . / أنظر التفاصيل لاحقاً.

2- إذا مكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = جـ فإنه يكون متصلاً عند س = جـ.

توضيح: للبحث في مشتقة اقتران عند نقطة تحول مثل س = جـ نتبع ما يلي:

- نبحث الاتصال عند النقطة فإن لم يكن الاقتران متصلاً فلا توجد مشتقة، وإن كان الاقتران متصلاً فإن ذلك لا يكفي ونبحث في المشتقة من اليمين والمشتقة من اليسار، فإذا تساوتا نقول: أن الاقتران قابل للاشتقاق وإذا لم تتساويا نقول: أن الاقتران غير قابل للاشتقاق.
- يفهم مما تقدم أن الاتصال شرط ضروري، لكن غير كافٍ للقابلية للاشتقاق. ويمكن توضيح ذلك من الشكل التالي:



مثال: ليكن ق(س) = $\begin{cases} 2س + 1، س \geq 2 \\ س^2 - 1، س < 2 \end{cases}$ ابحث في وجود ق′(2)

الحل: نبحث في اتصال ق(س) عند س = 2 حيث:

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = 2 \times 2 + 1 = 5$، $\lim_{س \to 2^-} ق(س) = \lim_{س \to 2^-} س^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

∴ $\lim_{س \to 2} ق(س)$ غير موجودة ∴ ق(س) غير متصل ⇐ ق′(2) غير موجودة.

مثال: إذا علمت أن ق (س) = $\begin{cases} 2س - س^2، & س < صفر \\ \frac{1}{2}س، & س \geq صفر \end{cases}$

فجد ق′(س)، ق′ (1).

الحل:

نبحث الاتصال: 2س-س^2، $\frac{1}{2}$س اقترانان متصلان لأنهما كثيرا الحدود

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = \lim_{س \to 0^-} 2س - س^2 = 2(0) - (0)^2 =$ صفر

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = \lim_{س \to 0^+} \frac{1}{2}س = \frac{1}{2}(٠) =$ صفر

ق(0)= صفر وتساوي $\lim_{س \to 0} ق(س)$ ⇐ ق متصل عند س = صفر ومتصل على مجاله .

نبحث الاشتقاق عند نقطة التشعب س = صفر

$ق'_-(0) = 2 - 2(0) = 2$ ؛ $ق'_+(0) = \frac{1}{2}$

بما أن $ق'_-(0) \neq ق'_+(0)$ ⇐ ق′ (0) غير موجودة.

$ق'(س) = \begin{cases} 2 - 2س، & س < صفر \\ \frac{1}{2}، & س > صفر \\ غير موجودة، & س = صفر \end{cases}$

لاحظ كيف رفعنا إشارة المساواة بين الفترة س ≥صفر)

$ق'(1) = \frac{1}{2}$ لأن 1 > صفر

2- اشتقاق اقتران القيمة المطلقة:

أولاً: نعيد تعريف الاقتران (فنحصل على اقتران متشعب متصل).

ثانياً: نشتق الاقتران كما في حالة الاقتران المتشعب(ونتأكد من تساوي المشتقة عند يمين ويسار نقط التشعب).

مثال: إذا كان ق(س)= | س^2+ 2س − 3 | فجد ق′ (س) ق′(0)، ق′ (1).

الحل:

نعيد تعريف ق(س) : س^2+2س−3 = (س−3) (س+1) = صفر

∴ س = 3 ، س = −1

س^2 + 2س − 3   −س^2−2س + 3   س^2+2س − 3

−1   3

$$\text{ق(س)} = |\text{س}^2 - 2\text{س} + 1| = \begin{cases} \text{س}^2 + 2\text{س} - 3 &، \quad \text{س} < -1 \\ -\text{س}^2 - 2\text{س} + 3 &، \quad -1 \le \text{س} < 3 \\ \text{س}^2 + 2\text{س} - 3 &، \quad \text{س} \ge 3 \end{cases}$$

نبحث في الاتصال عند نقط التشعب.

عندما س = −1 : $\overline{\text{ق}}_{+}(-1)$ = −2 (−1) −2 = 2−2 = صفر

$\overline{\text{ق}}_{-}(-1)$ = 2 (−1) + 2 = −2+2 = صفر

∴ ق′ (−1) = صفر

عندما س = 3 : $\overline{\text{ق}}_{+}(3)$ = 2 (3) + 2 = 6 + 2 = 8

$\overline{\text{ق}}_{-}(3)$ = −2(3)−2 = −6 − 2 = −8

∴ ق′ (3) غير موجودة.

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} + 2 &، \quad \text{س} < -1 \text{ أو } \text{س} > 3 \\ -2\text{س} - 2 &، \quad -1 \le \text{س} < 3 \\ \text{غير موجودة} &، \quad \text{س} = 3 \end{cases}$$

3− اشتقاق اقتران أكبر عدد صحيح ق(س) = [هـ(س)] نعيد تعريفه على فترة تضم قيمة س المطلوب إيجاد المشتقة عندها نحصل على اقتران متشعب مشتقته كما يلي:

$$ق'(س) = \begin{cases} \text{صفر} ، & \text{هـ}(س) \notin ص \\ \text{غير موجودة} ، & \text{هـ}(س) \in ص \end{cases}$$

التطبيقات المهمة على مشتقة اقترانات متشعبة، مشتقة اقترانات القيمة المطلقة ومشتقة اقترانات أكبر عدد صحيح:

القاعدة (8): مشتقة اقترانات القيمة المطلقة"

لايجاد مشتقة اقتران قيمة مطلقة، نعيد تعريف هذا الاقتران إلى قواعده. ثم نبحث في مشتقة الاقتران على أساس أنه اقتران متشعب.

يجب أن تعلم أن:

1- اقترانات القيمة المطلقة على صورة كثير حدود تكون متصلة على مجالها دائماً.

مثال: ق(س) = |4س-20| أوجد ق' (س)

الحل: بوضع 4س- 20 = 0 ← س = 5

20-4س | 5 | 4س-20

$$ق(س) = \begin{cases} 20 - 4س ، & س < 5 \\ 4س - 20 ، & س \geq 5 \end{cases} ، \quad ق'(س) = \begin{cases} -4 ، & س < 5 \\ \text{غير موجودة} ، & س = 5 \\ 4 ، & س > 5 \end{cases}$$

لاحظ أن ق' (5) غير موجودة، لأن ق' (5+) = 4 ≠ ق' (5-) = -4

2- يكون اقتران القيمة المطلقة الخطي غير قابل للاشتقاق عند صفره.

مثال: ق(س) = |6-2س| أوجد ق'(0)، ق'(10)، ق' (3)

الحل: نضع 6-2س = 0 ← س = 3

$$ق(س) = \begin{cases} 6 - 2س ، & س < 3 \\ 2س - 6 ، & س \geq 3 \end{cases} \Leftarrow \quad ق'(س) = \begin{cases} -2 ، & س < 3 \\ \text{غير موجودة} ، & س = 3 \\ 2 ، & س > 3 \end{cases}$$

∴ ق' (0) = -2، ق'(10)= 2 ، ق' (3)غير موجودة.

مثال: ق(س) = |4س−س^2| أوجد ق′ (س)

الحل: نضع 4س−س^2 = 0 ⇐ س(4−س) = 0

∴ س = 0 ، 4

س^2−4س   4س−س^2 س^2−4س

4   0

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 - 4\text{س} & \text{، س} < 0 \\ 4\text{س} - \text{س}^2 & \text{، } 0 \le \text{س} \le 4 \\ \text{س}^2 - 4\text{س} & \text{، س} > 4 \end{cases} \qquad \text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} 2\text{س} - 4 & \text{، س} < 0 \\ 4 - 2\text{س} & \text{، } 0 < \text{س} < 4 \\ 2\text{س} - 4 & \text{، س} > 4 \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = 0\text{،}4 \end{cases}$$

نرى أن ق′(0) ، ق′(4) غير موجودتين. لأن ق′(0+) ≠ ق′(0−) وكذلك ق′(4+) ≠ ق′(4−).

3− عند أصفار اقتران القيمة المطلقة التربيعي الذي مميزه موجب يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق دائماً.

مثال: إذا كان ق(س) = |س^2−2س−8| أوجد كل من ق′(1) ، ق′(5)، ق′ (0)، ق′(4)، ق′ (−2).

الحل: نضع س^2 − 2س − 8 = 0 ← (س−4) (س+2) =0

∴ س = 4 ، −2 .

س^2 − 2س − 8   −(س^2 − 2س − 8)   س^2 − 2س − 8

−2   4

$$\therefore \text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 - 2\text{س} - 8 & \text{، س} < -2 \\ -\text{س}^2 + 2\text{س} + 8 & \text{، } -2 \le \text{س} \le 4 \\ \text{س}^2 - 2\text{س} - 8 & \text{، س} > 4 \end{cases}$$

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} 2\text{س} - 2 & \text{، س} < -2 \\ -(2\text{س} - 2) & \text{، } -2 < \text{س} < 2 \\ 2\text{س} - 2 & \text{، س} > 4 \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = -2\text{، }4 \end{cases}$$

∴ ق′(1) = صفر ، ق′(5) = 8، ق′(0) = 2

4− هناك حالة خاصة: إذا كان لاقتران القيمة المطلقة التربيعي صفر (أي مميزه = صفر) فإنه في هذه الحالة يكون قابل للاشتقاق بصورة عامة، بما في ذلك عند صفره الوحيد حيث تكون المشتقة تساوي صفر.

مثال: ليكن ق(س) |س^3−9س| أوجد ق$'$(1)، ق$'$(−5)، ق$'$(0)

الحل: بوضع س^3 −9س = 0 س (س− 3) (س+3) = 0

9س − س^3		س^3−9س		9س − س^3		س^3− 9س
	−3		0		3	

ق(س) =
- 9س − س^3 ، س ≤ −3
- س^3 −9س ، −3 < س < 0
- 9س − س^3 ، 0 ≤ س ≤ 3
- س^3 − 9 ، س > 3

ق$'$(س) =
- 9 − 3س^2 ، س ≤ −3
- 3س^2 − 9 ، −3 < س < 0
- 9 − 3س^2 ، 0 < س < 3
- 3س^2 − 9 ، س > 3
- **غير موجودة**، س = 0 ل ±3

ق$'$(1) = 6، ق$'$(−5) = −66، ق$'$(0) غير موجودة.

مثالاً: إذا كان ق(س) = |س2−س−5| أوجد ق′(3) ، ق′(1).

هنا في هذه الحالة يصعب إيجاد أصفار وتحديد موقع النقط التي نريد المشتقة عندها لذلك نستخدم هنا الأسلوب التالي:

نعوض النقطة التي نريد المشتقة عندها داخل القيمة المطلقة فإن كان الناتج الداخلي موجباً نأخذ القاعدة نفسها ونشتقها ثم نعوض النقطة المطلوبة، وإن كان ناتج التعويض الداخلي سالباً، فإننا نأخذ القاعدة ونضربها في سالب ثم نشتق ونعوض.

الحل: ق(س) |س^2−س−5|

تعويض داخلي

3 ⟵ موجب ∴ ق(س) = س^2− س − 5

∴ ق′ (س)= 2س − 1 ⇐ ق′ (3) = 6−1 = 5

تعويض داخلي

1 ⟵ سالب ∴ ق(س) − (س^2 − س − 5)

∴ ق′(س) = − (2س−1) ⇐ ق′(1) = −(2−1) = −1

مثال: ق(س) = |2س^2−9س+5| أوجد ق′(0)، ق′(1).

الحل:

تعويض

0 ⟵ موجب ∴ ق(س) = 2س^2 − 9س + 5

ق′(س) = 4س−9 ∴ ق′(0) = −9

تعويض

1 ⟵ سالب ∴ ق(س) = −(2س^2 − 9س + 5)

ق′(س) = − (4س − 9) ⇐ ق′(1) = 5

فمثلاً ق(س) = |3س−1| أوجد ق′(0)، ق′(1)

الحل:

تعويض داخلي

0 ⟵ −1 (سالب) ∴ ق(س) = 1−3س

ق′(س) = −3 ∴ ق(0) = −3

تعويض داخلي

1 ⟵ 2 (موجب) ∴ ق(س) = 3س−1

ق′(س) = 3 ∴ ق′(1) = 3

مثال: إذا كان ق(س) = 2س^2 |3−س| أوجد ق′(2)، ق′(5)

الحل: نعيد تعريف المطلق بوضع 3−س = 0 ← س = 3

3−س | س−3

3

ن ق(س) = 2س^2 × { 3−س ، س < 3 ؛ س−3 ، س ≥ 3 }

⇐ ق(س) = { 6س^2−2س^3 ، س < 3 ؛ 2س^3−6س^2 ، س ≥ 3 }

$$ق(س) = \begin{cases} 12س - 6س^2 \text{ ، } س \leq 3 \\ 6س^2 - 21س \text{ ، } س > 3 \end{cases}$$

ق′ (2) = صفر ، ق(5) = 6 × 25 - 12 × 5 = 90

مثال: إذا كان ق(س) = |س-5| + |2-س| + 10 أوجد :

1- ق′(3)   2- ق′ (2+)   3- ق′(10)   4- ق′ (5)   5- ق′(-3)

الحل:

نعيد تعريف ق(س) كما يلي:

بوضع س-5 = 0 ← س = 5

بوضع 2-س = 0 ← س = 2

نضع على خط الأعداد 2 ، 5

2		5	
5-س 2-س	5-س س-2	س-5 س-2	|س-5| |2-س|
7-2س+10	5-2+ 10	2س-7+10	ق(س)= |س-5| + |2-س|

$$\therefore ق(س) = \begin{cases} -2س + 17 \text{ ، } س < 2 \\ 13 \text{ ، } 2 \leq س \leq 5 \\ 2س + 3 \text{ ، } س > 5 \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} -2 \text{ ، } س < 2 \\ صفر \text{ ، } 2 < س < 5 \\ 2 \text{ ، } س > 5 \\ غير\ موجودة \text{ ، } س = 2، 5 \end{cases}$$

ق′(3) = صفر   ، ق′ (2+)= صفر   ، ق′ (10) = 2

ق′(5) غير موجودة ، ق′(-3)= -2

القاعدة (9): مشتقة اقتران ق(س) = [هـ(س)]

إذا كان ق(س) =[هـ س] فإن:

$$ق(س) = \begin{cases} \text{صفر} & \text{، لكل س تجعل هـ(س) عدداً غير صحيح} \\ \text{غير موجودة} & \text{، لكل س تجعل هـ(س) عدداً صحيحاً} \end{cases}$$

مثال: ليكن ق(س) = [4س+0.2] أوجد ق′(1) ، ق′(1.2) ، ق′$\left(-\frac{5}{100}\right)$

الحل: ق′ (1) = صفر (لماذا).

ق′ (1.2) = غير موجودة (لماذا)

ق′$\left(-\frac{5}{100}\right)$= غير موجودة (لماذا).

مثال: ليكن ق(س) = $\left[س^2 + \frac{3}{4}\right]$

أوجد ق′ (1) ، ق′ $\left(\frac{1}{2}\right)$

الحل: ق′(1)صفر ، ق′ $\left(\frac{1}{2}\right)$ غير موجودة

ملاحظة: لا يوجد مشتقة عند أطراف الفترة الداخلة في المجال.

المشتقات العليا والمشتقة النونية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن:

ق′ (س) تمثل المشتقة الأولى للاقتران ق(س).

ق″ (س) تمثل المشتقة الثانية،بشرط أن يكون ق′(س) قابلاً للاشتقاق حيث ق″(س) هي مشتقة ق (س).

ق″ (س) تمثل المشتقة الثالثة، بشرط أن يكون ق″ (س) قابلاً للاشتقاق حيث ق‴ (س) هي مشتقة ق (س).

حيث ق‴ (س) هي مشتقة ق″ (س).

وهكذا تكون ق$^{(ن)}$ (س) أو ص$^{(ن)}$ المشتقة النونية، ن = 1، 2 ، 3، ...

ملاحظات:

1- يرمز للمشتقة الثانية بـ: ق″(س)، ص″، $\frac{د^2ص}{د س^2}$ ، $\frac{د}{د س}\left(\frac{د ص}{د س}\right)$ وبنفس الكيفية للمشتقة النونية

ق$^{(ن)}$ (س) ، ص$^{(ن)}$ ، $\frac{د^نص}{د س^ن}$.

2- لإيجاد قيمة المشتقة العليا عند قيمة معينة للمتغير س للاقتران ق(س)، نجد اقتران تلك المشتقة ثم نعوض عند قيمة س المطلوبة.

3- إذا أعطينا قاعدة المشتقة النونية فيمكن إيجاد قاعدة أي مشتقة عليا بالتعويض عن ن بدرجة المشتقة، مثلاً.

إن كان ق$^{(ن)}$(س) = ن! (س+1)^{ن} فإن المشتقة الأولى ق′(س) = س+1

ق″(س) = 2× 1 (س+1)^{2} = 2(س+1)^{2}، ...

المشتقة النونية ق$^{(ن)}$ (س):

هي صيغة عامة لمشتقة بعض الاقتراانات بدلالة رتبة المشتقة (ن) ن تأخذ القيم (3،2،1،...) أي المشتقة الأولى، الثانية، الثالثة ... ويعبر عن المشتقة النونية بالصور: ق$^{(ن)}$(س) ، ص $^{(ن)}$ ، $\frac{د^{ن}ص}{د س^{ن}}$.

خطوات إيجاد المشتقة النونية للاقتران ق(س):

1- نجد ق′(س)، ق″(س)، ق‴ (س)... باستخدام قواعد الاشتقاق. ويفضل عدم إيجاد نتيجة حاصل الضرب في كل مشتقة لتسهيل استنتاج قاعدة المشتقة النونية ويفضل تجنب التعبير عنها بصورة كسر.

2- بالاستقراء نستنتج القاعدة العامة للمشتقة النونية.

3- عند كتابة قاعدة المشتقة النونية نستعين بما يلي:

1- العامل (-1)^{ن} يعني المشتقة الفردية سالبة والزوجية موجبة.

مثال: إذا كان ق(س) = س.هـ(س)، هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فجد :

1- ق′ (س)　　　　2- ق″(س)　　　　3- ق‴ (س)

4- ق$^{(ن)}$ (س) (المشتقة النونية للاقتران ق(س)

الحل:

1- ق′ (س) = س هـ′(س) + هـ(س)

2- ق″ (س) = س هـ″ (س) + هـ′(س)×1 + هـ′ (س)

= س هـ″ (س) + 2 هـ′ (س)

3- ق‴ (س) = س× هـ‴ (س) + هـ″ (س)× 1 = 2هـ″ (س)

= س هـ‴ (س) + 3 هـ″ (س)

4- ق$^{(ن)}$(س) = س هـ$^{(ن)}$ (س) + ن هـ$^{(ن-1)}$ (س)

مثال: إذا كان ق(س) = جتا 2س ، فأوجد $\text{ق}^{(\text{ن})}$ (س) (المشتقة النونية للاقتران ق(س)) .

الحل:

ق(س) = جتا 2س

ق′ (س) = −2 جا 2س

ق″ (س) = −2 × 2 جتا 2س

ق‴(س) =2 × 2 × 2 جا 2س

ق⁗ (س) = 2 × 2× 2× 2 جتا 2س

$$\therefore \quad \text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}) = \begin{cases} 2^{\text{ن}}(-1)^{\frac{\text{ن}-1}{2}} \text{ ، } & \text{اجـ2س ، ن فردي} \\ 2^{\text{ن}}(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}} \text{ ، } & \text{تاجـ2س ، ن زوجي} \end{cases}$$

أو $\text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}) = 2^{\text{ن}} \text{ جتا} \left(2\text{س} + \frac{\text{ن}\pi}{2}\right)$

مثال توضيحي:

إذا كانت ص= ق(س) = س^5 فإن:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ق}'(\text{س}) = 5\text{س}^4$ ← تسمى المشتقة الأولى

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = \text{ق}''(\text{س}) = 20\text{س}^3$ ← تسمى المشتقة الثانية

$\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{د س}^3} = \text{ق}'''(\text{س}) = 60\text{س}^2$ ← تسمى المشتقة الثالثة

$\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{د س}^4} = \text{ق}''''(\text{س}) = 120\text{ س}$ ← تسمى المشتقة الرابعة

$\frac{\text{د}^5\text{ص}}{\text{د س}^5} = \text{ق}''''' = 120$ ← تسمى المشتقة الخامسة

$\frac{\text{د}^6\text{ص}}{\text{د س}^6} = \text{ق}'''''' =$ **صفر** ← تسمى المشتقة السادسة

وكذلك باقي المشتقات الأعلى تساوي صفر.

ملاحظة:

ويمكن استخدام الرمز ق$^{(2)}$(س) ليدل على المشتقة الثانية والرمز ق$^{(3)}$(س) ليدل على المشتقة الثالثة، إلى أن نصل إلى ق$^{(ن)}$(س) تسمى المشتقة النونية.

مثال: ق(س) = (2س-4)^3 أوجد س حيث ق′(س) = ق″(س)

الحل:

ق′(س) = 3(2س-4)^2 (2) = 6(2س-4)^2

ق″(س) = 12(2س-4) (2) = 24 (2س-4)

وبوضع 6 (2س-4)^2 = 24 (2س-4)

∴ 6 (2س-4)^2 -24 (2س-4) = صفر

∴ 6(2س-4) (2س-4-4) = صفر

∴ 6(2س-4) (2س-8) = 0 ⇐ س = 2، 4

مثال: إذا كان ق(س) $\frac{2}{س - 4}$ أوجد ق′(س) ، ق″(س)، ق‴ (س) ثم استنتج قاعدة ق$^{(ن)}$ (س) .

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-2}{(\text{س}-4)^2} = \frac{-1\times 2\times 1}{(\text{س}-4)^2}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{4}{(\text{س}-4)^3} = \frac{(-1)^2\times 2\times 2}{(\text{س}-4)^3}$$

$$\text{ق}^{////}(\text{س}) = \frac{48}{(\text{س}-4)^5} = \frac{(-1)^4\times 2\times 24}{(\text{س}-4)^5}$$

$$\text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}) = \frac{(-1)^{\text{ن}}\times 2\times \text{ن}!}{(\text{س}-4)^{\text{ن}+1}}$$

مثال: إذا علمت أن ق(س) = (س−2) |س| ، فجد ق′(س)، ق″(س) ثم جد ق′(س) ، ق″(س) ثم جد ق′(0) ، ق′(−1)، ق″(0) ، ق″(3).

الحل:

نعيد تعريف

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} (\text{س}-2)(-\text{س}) & \text{، س} < \text{صفر} \\ (\text{س}-2)(\text{س}) & \text{، س} \geq \text{صفر} \end{cases} = \begin{cases} -\text{س}^2+2\text{س} & \text{، س} < \text{صفر} \\ \text{س}^2-2\text{س} & \text{، س} \geq \text{صفر} \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -2\text{س}+2 & \text{، س} < \text{صفر} \\ 2\text{س}-2 & \text{، س} > \text{صفر} \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = \text{صفر} \end{cases}$$

حيث $\text{ق}'_{-}(0) = -2$ ، $\text{ق}'_{+}(0) = 2 \Leftarrow \text{ق}'(0)$ غير موجودة

$$\text{ق}''(\text{س}) = \begin{cases} -2 & \text{، س} < \text{صفر} \\ 2 & \text{، س} > \text{صفر} \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = \text{صفر} \end{cases}$$

ق′(0) غير موجودة.

ق′(−1) = −2(−1) + 2 = 2 + 2 = 4

ق″(0) غير موجودة

ق″(3) = 2

مثال: إذا كان ص $= \dfrac{1}{\text{س}+2}$ ، حيث س $\neq 2$ أثبت أن:

$$2 \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + (\text{س}+2) \times \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = \text{صفر}$$

الحل:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-1\times 1}{(\text{س}+2)^2} = \frac{-1}{\text{س}^2+4\text{س}+4}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} = \frac{1\times(2\text{س}+4)}{(\text{س}^2+4\text{س}+4)^2} = \frac{2\text{س}+4}{(\text{س}+2)^4}$$

$$2 \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + (\text{س}+2)\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2} =$$

$$2 \times \frac{-1}{(\text{س}+2)^2} + (\text{س}+2) \times \frac{(2\text{س}+4)}{(\text{س}+2)^4} = \frac{-2}{(\text{س}+2)^2} + \frac{2(\text{س}+2)^2}{(\text{س}+2)^4}$$

$$= \frac{-2}{(\text{س}+2)^2} + \frac{2}{(\text{س}+2)^2} = \text{صفر}$$

مثال: ق(س) = جتا^{2}س أوجد المشتقات الأربع الأولى ثم استنتج قاعدة المشتقة النونية.

الحل:

$$\text{ق(س)} = \text{جتا}^2\text{س} = \frac{1+\text{جتا}\,2\text{س}}{2} \quad \text{(متطابقة)}$$

$$\text{ق(س)} = \frac{-2\text{جا}\,2\text{س}}{2} = -\text{جا}\,2\text{س} \quad \text{لكن جا}\,2\text{س} = -\text{جتا}\left(2\text{س}+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(متطابقة)}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \text{جتا}\left(2\text{س}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$ق''(س) = -2\,جا\left(2س + \frac{\pi}{2}\right) = 2\ \ جتا\left(2س + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$ق'''(س) = -4\,جا\left(2س + 2\times\frac{\pi}{2}\right) = 4\ \ جتا\left(2س + 3\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$ق''''(س) = -8\,جا\left(2س + 3\times\frac{\pi}{2}\right) = 8\ \ جتا\left(2س + 4\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$ق^{(ن)}(س) = 2^{ن-1} \times \ جتا\left(2س + ن \times \frac{\pi}{2}\right)$$

مثال: $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $س > 0$ أوجد قاعدة $ق^{(ن)}(س)$

الحل: $ق'(س) = \frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}}$

$$ق''(س) = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}\,س^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \times س^{\frac{1}{2}-2}$$

$$ق'''(س) = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times س^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \times س^{\frac{1}{2}-3}$$

$$ق''''(س) = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times -\frac{5}{2}\,س^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right) \times س^{\frac{1}{2}-4}$$

$$ق^{(ن)}(س) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(ن-1)\right)س^{\left(\frac{1}{2}-ن\right)}$$

التعريف الفيزيائي للمشتقة:

تعريف (التسارع):

إذا حدد موقع جسيم متحرك في اللحظة ن بالعلاقة س = ف(ن) فإن تسارع الجسيم في اللحظة ن ويرمز له بالرمز ت(ن) = ع′ (ن) = ف″ (ن).

أي التسارع هو المشتقة الثانية للاقتران الموقع.

مثال: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية $ف(ن) = \frac{ن}{4} + \frac{ن^3}{12}$ حيث ن مقدرة بالثواني، ف(ن) مقدرة بالأمتار، جد تسارع الجسيم بعد 5 ثوانٍ.

الحل:

التسارع = ت(ن) = ف″ (∞)

$$ف'(ن) = \frac{1}{4} + \frac{3}{12} ن^2$$

$$ف''(ن) = \frac{6}{12} ن$$

$$\therefore\ ت(5) = \frac{6}{12} \times 5 = \frac{30}{12} = 2.5\ م/ث^2$$

تعريفات مهمة:

- $$السرعة\ المتوسطة = \frac{التغير\ في\ المسافة}{التغير\ في\ الزمن} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$$

- السرعة اللحظية = ع = المشتقة الأولى للمسافة بالنسبة للزمن

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{د ف}{د ن} = \lim_{ن_2 \to ن_1} \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1} = ف -$$

- $$السرعة\ المتوسطة = \frac{التغير\ في\ المسافة}{التغير\ في\ الزمن} = \frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(ن_2) - ع(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$$

- التسارع اللحظي = ت = المشتقة الثانية للمسافة بالنسبة للزمن = المشتقة الأولى للسرعة.

أي أن $ت = ف'' = \frac{د^2 ف}{د ن^2} = ع' = \frac{د ع}{د ن}$

$$= \lim_{ن_2 \to ن_1} \frac{ف'(ن_2) - ف'(ن_1)}{ن_2 - ن_1} = \lim_{ن_2 \to ن_1} \frac{ف(ع_2) - ع(ن_1)}{ع_2 - ع_1}$$

المفهوم الفيزيائي للمشتقة وكيفية حل مسائله:

1- السرعة الابتدائية تكون عند ن = صفر.

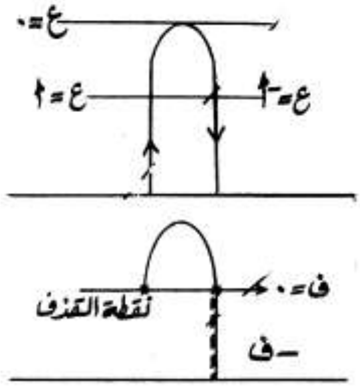
أي : السرعة الابتدائية = ف′ (0)

2- الجسم المقذوف إلى أعلى يصل إلى أقصى ارتفاع عند السكون أي (عندما ف′(ن)= صفر). ويعود إلى نقطة القذف عند ف= 0، وإذا سقط أسفلها فإن ف تكون سالبة.

3- إذا كان التسارع ف″ (ن) موجباً ⇐ السرعة تتناقص.

إذا كان التسارع ف″ (ن) سالباً ⇐ السرعة تتناقص

إذا كان التسارع ف ″ (ن) = صفراً ⇐ السرعة ثابتة لا تتغير.



4- في السؤال إذا أعطينا المسافة (أو السرعة أو التسارع) كاقتران وطلب منا إيجاد الكميات الأخرى عند لحظة معينة فتجد أولاً قيمة ن عند اللحظة المطلوبة، ونعوّض في ف(ن) لإيجاد المسافة، وفي ف′ (ن) لإيجاد السرعة وفي ف″ (ن) لإيجاد التسارع.

5- الزمن ن لا يأخذ قيماً سالبة (قيم ن السالبة تهمل) .

مثال: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف= 6ن^2 − 13ن + 10 حيث ... متوسطي السرعة والتسارع في الفترة الزمنية [3،1] .

الحل:

متوسط السرعة $= \frac{ف(3) - ف(1)}{3-1} = \frac{(10+13-6)-(10+3\times 13-9\times 6)}{2}$

$= \frac{(54-39)-(-7)}{2} = \frac{15+7}{2} = 11$ م/ث

لإيجاد متوسط التسارع فإن ع = ف′ = 12ن − 13

∴ متوسط التسارع = $\frac{ع(3) - ع(1)}{2} = \frac{(36-13)-(12-13)}{2} = \frac{24}{2} = 12$ م/ث^2

مثال: أوجد مساحة المثلث الذي يكون من المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ق(س) = س^2 عند النقطة (2،4) مع محور السينات.

الحل:

ق′(س) = 2س ⇐ ق′ (2) = 4

∴ معادلة المماس : ص − 4 = 4(س−2) ⇐ص = 4س − 4

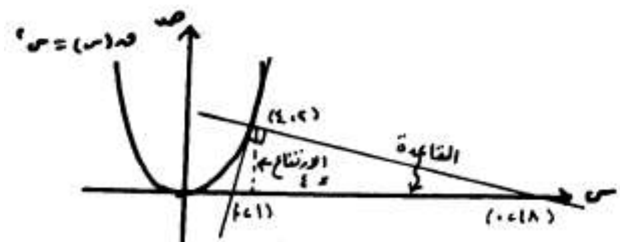
معادلة العمودي على المماس : ص − 4 = $\frac{-1}{4}$(س − 2)

المماس يقطع محور السينات عند ص = 0 ⇐ صفر = 4س−4 ⇐ س=1

العمودي يقطع محور السينات عند ص = 0 ⟸ $0-4=\frac{-1}{4}(س-2)$ ⟸ س = 18

∴ رؤوس المثلث المقصود هي: (1،0) ، (18،0) ، (2،4)

طول القاعدة = 18−1 = 17



الارتفاع = 4

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}\times17\times4$

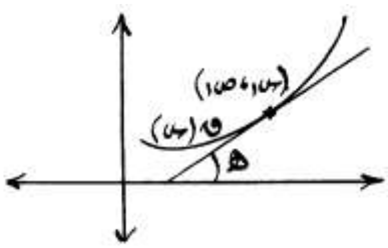
= 34 وحدة مربعة

التعريف الهندسي للمشتقة (ملخص) :

إذا كان الاقتران ص = ق(س) قابلاً للاشتقاق فإن:

المشتقة الأولى تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة التماس (س1،ص1) أي م = $م=\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=س_1}$ وهي

تمثل ظل الزاوية المحصورة بين المماس والاتجاه الموجب لمحور السينات حيث هـ قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



إذن معادلة المماس : ص − ص1 = م(س−س1) ، م : ميل المماس

ومعادلة المماس العمودي على المماس :

ص − ص1 = $\frac{-1}{2}(س-س_1)$.

قاعدة: أي أن ق′(س1) = ميل المماس عند (س1،ص1) = ظا هـ

مثال: إذا علمت أن العمودي على أحد مماسات منحنى الاقتران هـ(س) = $\frac{1}{س s}$ يصنع مع محور السينات الموجب زاوية مقدارها $\frac{\pi}{4}$ فجد إحداثيات نقطة التماس، ومعادلة هذا المماس .

الحل:

ميل المماس = هـ′(س) = $\frac{-1}{س^2}$ ⟸ ميل العمودي على المماس = $س^2$ لكن: ميل العمودي على المماس = ظا $\frac{\pi}{4}$.

$س^2$ = 1 ⟸ س = ±1

∴ هناك مماسان يحققان شرط السؤال عند س = 1 ، س = −1

عند س = 1 : معادلة المماس هي: ص − هـ(1) = −1 (س−1)

ص−1 = 1−س ونقطة التماس هي (1،1)

عند س = −1 : معادلة المماس هي ص − هـ(−1) = −1 (س + 1)

ص + 1 = 1−س ونقطة التماس هي (−1،−1)

مثال: أكتب معادلة الماس لمنحنى ق(س) = س^2 + 2س −3 عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س−1 .

الحل:

عند نقط التقاطع ق(س) = ص

س^2 + 2س − 3 = س − 1

س^2 + س − 2 = صفر

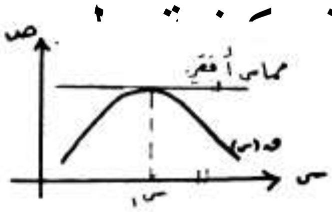
(س+2) (س−1) = صفر ⇐ س = −2 ، س = 1

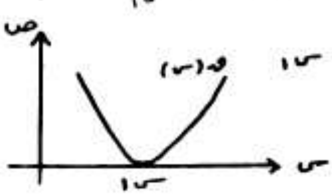
∴ نقط التقاطع هي: (−2،−3) ، (1،صفر)

عند س = −2 ، ق′ (س) = 2س +2 ⇐ ق′ (−2) = 2(−2) + 2 = −2

∴ معادلة المماس : ص + 3 = −2 (س + 2)

المفهوم الهندسي للمشتقة مسائلها:





1− ميل محور السينات أو أي مستقيم يوازيه يساوي صفر، أما ميل محور الصادات أو أي مستقيم يوازيه فيساوي كمية غير معرفة $\left(\frac{\text{العدد}}{\text{صفر}}\right)$.

2− معادلة محور السينات هي ص = صفر ومعادلة محور الصادات هي س = 0

3− إذا كان المستقيم يوازي محور السينات فإن معادلته ص = جـ ثابت .

أما إذا كان المستقيم يوازي محور الصادات فإن معادلته س = ك / ثابت .

4− ميل المستقيم الواصل بين النقطتين (س$_1$،ص$_1$) ،(س$_2$،ص$_2$) هو

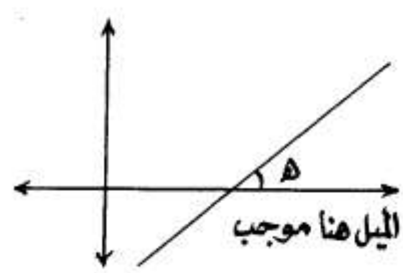
$$\text{م} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

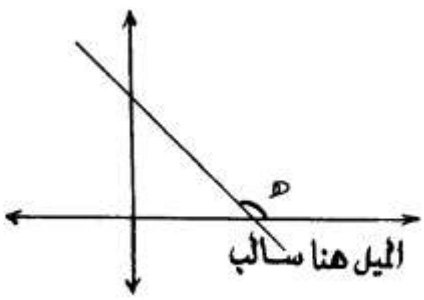
5- ميل المستقيم بالصورة ص = م س + جـ هو م(معامل س).

6- معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل (0،0) هي ص = م س حيث م هو الميل.

7- ميل المستقيم يكون موجباً إذا صنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، زاوية هـ حيث صفر <هـ< $\frac{\pi}{2}$

ويكون ميله سالباً إذا كانت $\frac{\pi}{2}$ <هـ< π .



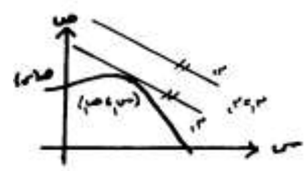


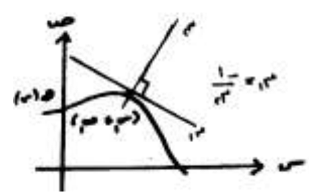
8- إذا توازى مستقيمان فإن لهما نفس الميل.

9- إذا تعامد فإن حاصل ضرب ميلاهما يساوي (-1).

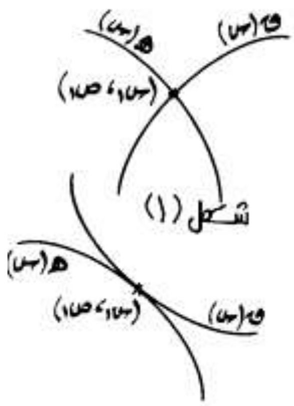
10- لإيجاد نقاط تقاطع منحنى ق(س) = ص مع محور السينات نضع ص = 0.

11- لإيجاد نقاط تقاطع منحنى ق(س) =ص مع محور الصادات نضع س = 0 .





12- لإيجاد نقاط تقاطع منحنيين مثل ق(س) ،هـ(س) نساويهما أي نضع ق(س) = هـ(س).



13- عند نقطة تقاطع منحنيين مثل ق(س) ، هـ(س) يكون :

أ) ق(س$_1$) = هـ(س$_1$)

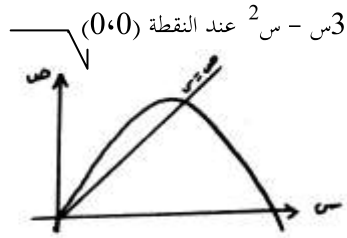
ب) ق′(س$_1$) ≠ هـ′(س$_1$)

14- عند نقطة تماس منحنيين مثل ق(س)، هـ(س) يكون:

أ) ق(س$_1$) = هـ(س$_1$).

ب) ق′(س$_1$) = هـ′(س$_1$)

مثال: من الشكل المجاور أوجد قياس الزاوية المحصور بين المستقيم ص= س و 3س - س^2 عند النقطة (0،0)



الحل:

ميل المستقيم (ص=1) $\frac{د ص}{د س} = 1$ = ظاهـ$_1$

حيث هـ $_1$ الزاوية التي يصنعها المستقيم (ص=س) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ⟸ **هـ** $_1 = \frac{\pi}{4} = 45°$

ق$'$(س) = 3 − 2س

ق′ (0)= 3 = ظاهـ $_2$

حيث هـ $_2$ الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى ق(س) = 3س - س^2 مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⟸ **هـ** $_2 = \frac{\pi}{3} = 60°$

الزاوية المطلوبة: |هـ$_1$- هـ$_2$|

= |54° - 60 °| = 15 °

مثال: أوجد جميع قيم س التي يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) = **س** − $\frac{1}{س}$ موازياً للمستقيم 2س- ص = 5

الحل: ميل المماس للمنحنى = ميل المستقيم (ص = 2س -5)

$$1-\frac{-1}{س^2}=2 \Rightarrow 1+\frac{1}{س^2}=2 \Rightarrow \frac{1}{س^2}=1$$

$$\therefore\ س^2=1 \Rightarrow س=\pm 1$$

مثال: أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = 2جا$^2 3$س عند س = $\frac{\pi}{12}$.

الحل: عند س = $\frac{\pi}{12}$ فإن ص = 2جا$^2 \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$\therefore$ النقطة $\left(\frac{\pi}{12}، 1\right)$

م = صَ = 2×2 جا3س $\times 3$جتا 3س = 12 جا 3س جتا 3س

$$م\Big|_{س=\frac{\pi}{12}} = 12 جا \frac{\pi}{4}\ جتا \frac{\pi}{4} = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$$

$\therefore$ معادلة الماس ص $-\ 1 = 6\left(س - \frac{\pi}{12}\right)$

$$\therefore\ ص = 6س - \frac{\pi}{2} + 1$$

مثال: أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة ظا س ص = س عند النقطة $\left(1، \frac{\pi}{1}\right)$.

الحل:

نجد = م (ضمنياً) حيث قا^{2}س ص × (س×صَ + ص×1) = 1

وعند $\left(1، \frac{\pi}{4}\right)$ فإن قا$^2 \frac{\pi}{4} \times \left(5ت + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\therefore\ 2\left(صَ + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 2صَ + \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\therefore\ صَ = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ معادلة\ المماس\ ص - \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)(س - 1)$$

$$\therefore\ ص = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)(س - 1) + \frac{\pi}{4}$$

مثال: أوجد النقط على منحنى ص = س−2 جتا س حيث المماس يوازي محور السينات علماً بأن $0 \leq$ س $\leq 2\pi$.

الحل: ميل المماس للمنحنى = صفر لأن المماس // محور السينات

1+ 2 جا س = صفر ⇐ جا س $= -\frac{1}{2}$ ⇐ س $= 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$

أو س = $330^\circ = \frac{11\pi}{6}$

س = $\frac{7\pi}{6}$ ⇐ ص $= \frac{7\pi}{6} - 2$ جتا $210^\circ = \frac{7\pi}{6} - 2 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}$

س = $\frac{11\pi}{6}$ ⇐ ص $= \frac{11\pi}{6} - 2$ جتا $330^\circ = \frac{11\pi}{6} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\pi}{6} - \sqrt{3}$

∴ يوجد نقطتان هما

$\left(\frac{7\pi}{6} ، \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ، $\left(\frac{11\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

الاشتقاق الضمني:

نصادف معادلات لا ترد فيها ص صريحة بالصورة ص − ق(س) بل يتم تضمينها داخل المعادلة (كأن تكون ص مرفوعة إلى قوة مثل ص^2، أو مضروبة بمتغير آخر مثل 3س ص ، وهكذا ...) الاشتقاق في هذه الحالة يسمى الاشتقاق الضمني. مثل إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ للمعادلة 3س ص = ص^2 + س في حالة الاشتقاق الضمني نشتق كل الحدود بالنسبة إلى س بها (ونأخذ بالاعتبار أن ص هو اقتران لِص هو اقتران لِ س وليس متغيراً مستقلاً).

فمثلاً : مشتقة س^3 بالنسبة إلى س هي 3س^2.

لكن مشتقة ص^3 بالنسبة إلى س هي 3ص^2 $\frac{د ص}{د س}$.

مثال: إذا كانت ص^2 = س^3 = 10− ص أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند (1،2) .

الحل:

نشتق ضمنياً 2ص $\frac{د ص}{د س}$ + 3س^2 = − $\frac{د ص}{د س}$ وعند (1،2)

$\therefore$ 2 $\frac{د ص}{د س}$ +12 = $\frac{د ص}{د س}$ ⇐ 3 $\frac{د ص}{د س}$ = −12 .

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س}$ = −4

خطوات الاشتقاق الضمني:

1− نشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س ، فيكون:

مشتقة س هي 1

مشتقة ص هي 1 × $\frac{د ص}{د س}$

مشتقة $س^2$ هي 2س

مشتقة $ص^2$ هي 2ص × $\frac{د ص}{د س}$

مشتقة س ص هي س $\frac{د ص}{د س}$ + ص × 1 ... وهكذا

2− ننقل الحدود التي تحتوي على $\frac{د ص}{د س}$ في طرف من المعادلة، ثم نتخلص من معاملاتها بالقسمة، فنحصل على $\frac{د ص}{د س}$ المطلوبة.

مثال: إذا كانت $س^2$ = 2س ص + $ص^3$ = 6 ، جد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل:

2س + 2س × $\frac{د ص}{د س}$ + ص × 2 + 3$ص^2$ × $\frac{د ص}{د س}$ = صفر

2س $\frac{د ص}{د س}$ + 3$ص^2$ $\frac{د ص}{د س}$ = −2س − 2ص

$\frac{د ص}{د س}$ (2س + 3$ص^2$) = −2 س − 2ص

$$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{-2س - 2ص}{2س + 3ص^2}$$

ملاحظة: يمكن حل أمثلة الاشتقاق الضمني وفق القانون التالي:

1- نجعل كل المقادير في جانب واحد.

2- نطبق القانون : $\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{-(\text{مشتقة المقدار على أساس أن ص ثابت})}{\text{مشتقة المقدار على أساس أن س ثابت}}$

مثال: إذا كان $س^2 + س\,ص + 3ص^2 = 1$ أثبت أن $(س+6ص)^3 \frac{د^2\,ص}{د\,س^2} + 22 = 0$

الحل: نجد $\frac{د\,ص}{د\,س}$ ثم $\frac{د^2\,ص}{د\,س^2}$ ضمنياً حيث

$2س + س \frac{د\,ص}{د\,س} + ص + 6ص \frac{د\,ص}{د\,س} = $ صفر $\Leftarrow (س + 6ص) \frac{د\,ص}{د\,س} = -2س - ص$

$$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{-2س - ص}{س + 6ص}$$

$$\therefore \frac{د^2ص}{د\,س^2} = \frac{(س+6ص)\left(-2 - \frac{د\,ص}{د\,س}\right) - (-2س - ص)\left(1 + 6\frac{د\,ص}{د\,س}\right)}{(س+6ص)^2}$$

$$= \frac{(س+6ص)\left(-2 + \frac{2س + ص}{س+6ص}\right) + (2س - ص)\left(1 + 6 \times \frac{-2س - ص}{س+6ص}\right)}{(س+6ص)^2}$$

$$= \frac{(س+6ص)\left(\frac{-2(س+6ص) + 2س + ص}{س+6ص}\right) + (2س + ص)\left(\frac{س + 6ص + 6(-2س - ص)}{س+6ص}\right)}{(س+6ص)^2}$$

$$\frac{(س+6ص)\left(-2(س+6ص)+2س+ص\right)+(2س+ص)(س+6ص-12س-6ص)}{(س+6ص)^{3}}$$

$$\therefore \frac{د^{2}ص}{دس^{2}}=\frac{(س+6ص)(-11ص)+(2س+ص)(-11س)}{(س+6ص)^{3}}$$

$$=\frac{-11س ص-66ص^{2}-22س^{2}-11س ص}{(س+6ص)^{3}}$$

$$=\frac{-22س^{2}-22س ص-66ص^{2}}{(س+6ص)^{2}}=\frac{-22(س^{2}+س ص+3ص^{2})}{(س+6ص)^{3}}$$

$$=\frac{-22(1)}{(س+6ص)^{3}}$$ س لأن $س^{2}$ + س ص + $ص^{2}$ = 1 من الفرض

$$\therefore \text{المطلوب } (س+6ص)^{3}\frac{د^{2}ص}{دس^{2}}+22=(س+6ص)^{3}\times\frac{-22}{(س+6ص)^{3}}+22$$

= −22 + 22= صفر.

استخدام هذه القاعدة للتأكد من صحة الحل للمثال:

قاعدة لبيتال:

عند حساب قيمة نهاية الاقتران الكسري الذي ناتج التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ كنا نقوم بعمليات رياضية

لتجنب هذه النتيجة، ومن ثم نجد النهاية، مثل:

$$\lim_{س\to1}\frac{س^{2}-1}{س-1}=\lim_{س\to1}\frac{(س-1)(س+1)}{(س-1)}=1+1=2$$ إن قاعدة لوبيتال تمكننا من حساب هذا النوع

من النهايات مباشرة باستخدام المشتقة حيث أن قاعدة لوبيتال تنص على:

"إذا كانت $\lim_{س\to أ}\frac{ق(س)}{هـ(س)}=\frac{صفر}{صفر}$ فإن

$$\lim_{س\to أ}\frac{ق(س)}{هـ(س)}=\lim_{س\to أ}\frac{\bar{ق}(س)}{\bar{هـ}(س)}=\frac{\bar{ق}(أ)}{\bar{هـ}(أ)}$$

مثال:

$$\underset{س\to 1}{نها}\ \frac{س^2-1}{س-1} = \underset{س\to 1}{نها}\ \frac{2س}{1} = 2$$

قاعدة السلسة:

إذا كان الاقترانان ق، هـ قابلية للتركيب، وكان الاقتران هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س، وكان الاقتران ق قابلاً للاشتقاق عند النقطة هـ(س)، فإن الاقتران المركب ق$_o$هـ يكون قابلاً للاشتقاق عند س وإن:

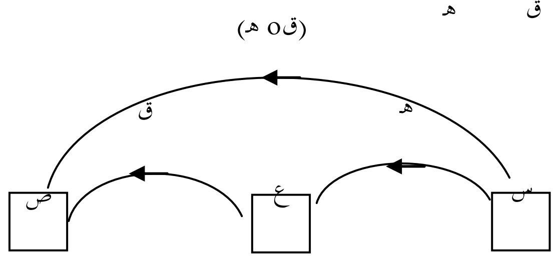
$$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$$

أي: إذا كان ص = ق(ع) (ص اقتران للمتغير ع)

ع = هـ(س) (ع اقتران للمتغير س)

فإن: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

ق هـ



ملاحظة هامة: إذا كان ص = هـ(س))^{ن}، ن ∈ص*

فإن: $\frac{دص}{دس} = ن(هـ(س))^{ن-1}\ هـ'(س)$

مثال: إذا كانت ع = $4ن^2-1$ ، ن = $\sqrt{ك+1}$ أوجد $\frac{دع}{دك}$ عند ك = 3

الحل:

$$\frac{دع}{دك} = \frac{دع}{دن} \times \frac{دن}{دك} = 8ن \times \frac{1}{2\sqrt{ك+1}} = \frac{4ن}{\sqrt{ك+1}}$$

لكن عند ك = 3 فإن ن = $\sqrt{4}$ = 2

$\therefore \left.\dfrac{دع}{دك}\right|_{\substack{ك=3\\ن=2}} = \dfrac{4\times 2}{\sqrt{3+1}} = 4$

مثال: إذا كان ص = جا^3 2س، جد $\dfrac{دص}{دس}$

الحل: لدينا ثلاثة اقترانات متراكبة:

ص = ع^3 ، ع = جا هـ ، هـ = 2س

$\dfrac{دص}{دس} = \dfrac{دص}{دع} \times \dfrac{دع}{دهـ} \times \dfrac{دهـ}{دس}$

= 3ع^2 × جتا هـ × 2

= 3 (جا 2هـ)^2 × جتا هـ × 2   (ع = جا هـ)

= 3(جا2س)^2× جتا (2س) ×2   (هـ= 2س)

= 6س^2 2س جتا 2س

نتيجة : يمكن تعميم النتيجة أعلاه على جميع الاقترانات الدائرية من خلال الجدول التالي (اعتماداً على قاعدة السلسلة):

الاقتران ق(س)	المشتقة ق′ (س)
جا^{ن} هـ(س)	ن جا$^{ن-1}$ هـ(س) جتا هـ(س) هـ′ (س)
جتا^{ن}هـ(س)	-ن جتا$^{ن-1}$ هـ(س) جا هـ(س) هـ′ (س)
ظا^{ن}هـ(س)	ن ظا$^{ن-1}$ هـ(س) قا^2 هـ(س) هـ′ (س)
ظتا^{ن}هـ(س)	-ن ظتا$^{ن-1}$ هـ(س) قتا^2 هـ(س) هـ′ (س)
قا^{ن}هـ(س)	ن قا$^{ن-1}$ هـ(س) قا هـ(س) ظا هـ(س) هـ′ (س)
قتا^{ن}هـ(س)	-ن قتا$^{ن-1}$ هـ(س) قتا هـ(س) ظتاهـ (س) هـ′ (س)

مثال: م(س) = س^3 أوجد :

1- (م∘م)′ (1)   2- (م′∘ م′) (1)   3- (م∘ م′)′ (1)

الحل: م′ (س)= 3س^2، م″(س)= 6س

1- (م∘م)′ (1) = م′ (م(1)) × م′ (1) = م″ (1) × 3 = 3×3 = 9

2- (م′∘م) (1) = م′ (م(1))×م′ (1) = م″(1) ×3 = 6×3 =18

3- (م′∘م) (1) = م″ (م′ (1))×م″(1) = م″(3) ×6 = 18×6 =108

مثال: إذا علمت أن ق(3)، ق $'$(3)=2 ، هـ(3)= $\frac{1}{2}$ ، هـ $'$(3) = -1 ق $'$ ($\frac{1}{2}$)=4، هـ $'$(5)= -3 اعتمد ذلك لإيجاد.

1- (ق∘هـ) $'$(3)   2-(هـ∘ق) $'$(3)

الحل:

1- (ق∘هـ) $'$(3) = ق $'$(هـ(3))× هـ $'$(3)

$= ق' \left(\frac{1}{2}\right) \times -1 = 4 \times -1 = -4$

2- (هـ∘ق) $'$(3) = هـ $'$(ق(3)) × ق $'$(3)

$= هـ'(5) \times 2 = -3 \times 2 = -6$

مثال: ق(س) = 4س ^{2}- 10 ، هـ(س) = س ^{2} أوجد :

1- (ق∘هـ) $'$(س)   2- (هـ∘ق) $'$(س)

الحل:

ق $'$(س) = 8س ، هـ $'$(س) = 2س

1- (ق∘هـ) $'$ س = ق $'$ (هـ(س) × هـ $'$ (س)

= ق $'$ (س ^{2})× 2س

= 8س ^{2} × 2س = 16س ^{3}

2- (هـ∘ق) $'$ (س) = هـ $'$ (ق(س)) × ق $'$ (س)

= هـ $'$ (4س ^{2} - 10) × 8س

= 2 (4س ^{2} - 10) × 8س = 64س ^{3} - 160س

تطبيقات مثلثية على قاعدة السلسلة

مثال: إذا كانت ص =جا^{3}2س أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند س = $\frac{\pi}{12}$

الحل: ص = (جا2س)^3 ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ 3(جا2س)^2 × 2 جتا 2س

$$\therefore \left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{12}} = 3\,\text{جا}^2 30 \times 2\ \text{جتا}\ 30 = 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 6\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

مثال: إذا كانت ص = قا^3 $\frac{1}{2}$س^2 أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل:

$$\text{ص} = \left(\text{قا}\,\frac{1}{2}\text{س}^2\right)^3 \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3\left(\text{ق}\,\frac{1}{2}\text{س}^2\right)^2 \times \text{قا}\,\frac{1}{2}\text{س}^2\,\text{ظا}\,\frac{1}{2}\text{س}^2 \times \text{س}$$

$$= 3\text{س قا}^3\,\frac{1}{2}\text{س}^2\,\text{ظا}\,\frac{1}{2}\text{س}^2 = 3\ \text{س ص ظا}\ \frac{1}{2}\ \text{س}^2$$

مثال: أوجد مشتقة كل من جا^{2}س^3، جا^{3}س^2

الحل:

1- $\text{ص} = \text{جا}^2\,\text{س}^3 = \left(\text{جا س}^3\right)^2 \leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\text{س}^3 \times \text{جتا س}^3 \times 3\ \text{س}^2$

$= 6\text{س}^2\ \text{جا س}^3\ \text{جتا س}^3$

$= 3\text{س}^2\ \text{جا}\ 2\text{س}^3$

2- $\text{ص جا}^3\text{س}^2 = \left(\text{جا س}^2\right)^3 \leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3\left(\text{جا س}^2\right)^2 \times \text{جتا س}^2 \times 2\text{س}$

$= 6$س جا^{2}س^2 جتا س^2

مثال: أوجد مشتقة كل من $\sqrt[3]{ظا س^5}$ ، $\sqrt[5]{ظا س^3}$

الحل:

1- نضع ص $= (ظا س^5)^{\frac{1}{3}} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{3}(ظا س^5)^{-\frac{2}{3}} \times$ قا^2 س$^5 \times 5$س^4

$$= \frac{5}{3} س^4 \; قا^2 س^5 \times \frac{1}{\sqrt[3]{(ظا س^5)^2}}$$

2- ص $= (ظا س^3)^{\frac{1}{5}} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{5} \times (ظا س^3)^{-\frac{4}{5}} \times$ قا^2 س$^3 \times 3$ س^2

$$= \frac{3}{5} س^2 \; قا^2 س^3 \times \frac{1}{\sqrt[5]{(ظا س^3)^4}}$$

مثال: $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{جا^3(س + هـ) - جا^3 س}{هـ} =$ **مشتقة جا^{3}س** حسب تعريف المشتقة.

$= 3$جا^{2}س × جتا س

مثال: $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{جتا^2(س + هـ)^3 - جتا^2 س^3}{2 هـ} = \frac{1}{2} \times$ مشتقة جتا^2 س^3 حسب تعريف المشتقة

$= \frac{1}{2} \times 2$ جتا س$^3 \times -3$ س^2 جا س^3

$= -3$ س^2 جتا س^3 جا س^3

مثال: $\lim\limits_{ع \to س} \frac{ظا^2 3 ع - ظا^2 3 س}{ع - س} =$ مشتقة ظا^2 3 س $= 2$ظا 3 س قا^2 3 س × 3

$= 6$ ظا 3س قا^2 3س

مثال: $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{قا^{\frac{1}{2}}(2 س + 3 هـ) - قا^{\frac{1}{2}} 2 س}{2 هـ} = \frac{3}{2 \times 2} \times$ مشتقة قا$^{\frac{1}{2}}$ 2س

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ قا$^{-\frac{1}{2}}$ 2س قا 2س ظا 2س × 2

$= \frac{3}{4}$ قا$^{\frac{1}{2}}$ 2س ظا 2س

مشتقة الاقترانات الدائرية:

1- إذا كان ق(س) = جاس فإن ق′(س)= جتا س وبصورة عامة إذا كان ق(س) = جاهـ(س) حيث هـ(س) قابل للاشتقاق فإن ق′ (س) = هـ′ (س) جتا هـ(س).

مثال:

1. ق(س) = جا(9س−س^2) ← ق′ (س) = (9−2س) جتا (9س−س^2)
2. ق(س) = جا (جاس) ⇐ ق′ (س) = جتا س جا (جاس)

مثال: ق(س) = س^{2}جا^{3}س ⇐ ق′ (س) = س^3 × 3جتا 3س + جا3س = 2س

= 3س^2 جتا 3س + 2س جا 2س

2- إذا كان ق(س) = جتاس فإن ق′ (س) = −جاس وبصورة عامة إذا كان ق(س) = جتا هـ(س) حيث هـ(س) قابل للاشتقاق فإن ق′ (س) = −هـ′ (س) جا هـ(س).

مثال:

1. ق(س) = جتاس^3 ← ق′(س) = −3س^2 جاس^3
2. ق(س)=جتا $\sqrt{8-\text{س}}$ ⇐ ق′(س)= $-\left(\frac{-1}{2\sqrt{8-\text{س}}}\right)$ جا $\sqrt{8-\text{س}}$ = $\frac{1}{2\sqrt{8-\text{س}}}$ جا $\sqrt{8-\text{س}}$

نظريات وقوانين وبراهين على حساب التفاضل

مثال: ق(س) = جتا $\frac{2}{س}$ أوجد ق$'\left(\frac{4}{\pi}\right)$

الحل:

$$ق'(س) = - \frac{-2}{س^2} جا \frac{2}{س} = \frac{2}{س^2} جا \frac{2}{س}$$

$$ق'\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{2}{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2} جا \frac{2}{\frac{4}{\pi}} = \frac{2\pi^2}{16} جا \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} \times 1 = \frac{\pi^2}{8}$$

الاقتران ق(س)	المشتقة ق$'$ (س)
جاس	جتا س
جتا س	-جاس
ظا س	قا^{2}س، ، س $\neq \frac{\pi}{2} + 7\pi$
قاس	قاس ظاس
قتاس	– قتاس ظتا س
ظتا س	– قتا2 س

مثال: أثبت أن مشتقة جاس هي جتا س ، وأن مشتقة جتاس هي – جاس مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل: 1) ق(س) = جاس

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{جا(س + هـ) - جا س}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{2 \ جتا\left(\frac{س + هـ + س}{2}\right) جا\left(\frac{س + هـ - س}{2}\right)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{2 ئـجh\left(س + \frac{هـ}{2}\right) جا \frac{هـ}{2}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} 2\ جتا\left(س + \frac{هـ}{2}\right) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{جا \frac{هـ}{2}}{\frac{هـ}{2}} \times \frac{1}{2} \quad \left(\text{ضربنا بالمقدار } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\ جتا(س + 0) \times 1 \times \frac{1}{2} = جتا\ س \quad (\text{وهو المطلوب})$$

2- ق(س) = جتاس

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{جتا(س + هـ) - جتا\ س}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{-2 جا\left(\frac{س + هـ + س}{2}\right) جا\frac{(س + هـ - س)}{2}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-2 جا\left(س + \frac{هـ}{2}\right) جا\frac{هـ}{2}}{هـ} = -\lim_{هـ \to 0} 2 جا\left(س + \frac{هـ}{2}\right) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{جا\frac{هـ}{2}}{\frac{هـ}{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= -2 جا(س + 0) \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= - جا\ س \quad (\text{المطلوب})$$

مثال: ق(س) = ظا2س ظا3س أوجد ق$'\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل:

ق'(س) = ظا 2س × 3قا^2 3س + ظا 3س × 2 قا^2 2س

$$ق'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{جتا^2 45} + 2 \times 1 \times \frac{1}{جتا^2 30}$$

$$= 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} + 2 \times \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{8}{3} = \frac{18 + 8\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

مثال: إذا كان ق(س) = جتا 6س أوجد ق$''\left(\frac{\pi}{18}\right)$

الحل:

ق'(س) = -6 جا6س ⇐ ق''(س) = -36 جتا 6س

∴ $ق''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -36$ جتا $\left(\frac{\pi}{3}\right) = -36 \times \frac{1}{2} = -18$

مثال: إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \text{أ س + ظا س} \quad ، \quad \frac{\pi}{4} \le \text{س} \\ \text{ب} - \sqrt{2} \text{ جتا س} \quad ، \quad \frac{\pi}{4} > \text{س} \end{cases}$ أوجد الثابتين أ ، ب

إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق على $\left[0 ، \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل: ق(س) متصل عند س $\frac{\pi}{4}$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{4}^{+}}\left(أس+ظا\,س\right)=\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{4}^{-}}\left(ب-2\sqrt{جتا\,س}\right)$

$\therefore$ $أ\times\frac{\pi}{4}+ظا\frac{\pi}{4}=ب-2\sqrt{جتا\frac{\pi}{4}}$

$\therefore$ $\frac{أ\pi}{4}+1=ب-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftarrow$ $\frac{أ\pi}{4}-ب=-2$ ……….. (1)

كذلك $ق\left(\frac{\pi}{4}^{+}\right)=ق\left(\frac{\pi}{4}^{-}\right)$ لكن $ق(س)=\begin{cases}أ+قا^{2}س، & س>\frac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}\,جا\,س، & س<\frac{\pi}{4}\end{cases}$

أسئلة وتمارين للمراجعة

أولاً: التعاريف:

1-الدالة الحقيقية:

- هي راسم نطاقه ونطاقه المصاحب فئة جزئية من فئة الأعداد الحقيقية ح.

- التعبير الرمزي للدالة د .

د : س ← ص حيث س ← د(س) = ص

س نطاق الدالة، ص نطاقها المصاحب، د(س) هي قيمة الدالة عند س.

2- نطاق الدالة الحقيقية:

هو فئة الأعداد الحقيقية حيث د معرفة.

3- مدى الدالة الحقيقية:

هو فئة قيم الدالة في نطاقها أ ، هو صورة نطاق د .

أي مدى د = }ص:ص = د(س) {

4- تتعين الدالة الحقيقي متى علم:

[أ] نطاقها. [ب] قاعدة التعيين ص = د(س).

5- مقياس العدد الحقيقي س ويرمز له بالرمز |س| حيث:

|س|| = { س (س ≤ 0)
- س (س ≥ 0)

- الدالة د حيث د(س) = |س| نطاقها ح ومداها فئة الأعداد الحقيقية غير السالبة.

خواص المقياس:

1-|س| ≤ 0   2- |-س| = |س|

3- |س| = أ ⇔ س = ≠ أ   4- -|س| ≥ س≥ |س|

5- |س| ≥ أ ⇔ -أ ≥ س≥ أ   6- |س| ≤ أ ⇔ س ≤ أ

أ ، س ≥ −أ

7- |س.ص| = | . | |ص|

8- $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$ (ص ≠ 0)

9- |س+ص| ≥ |س| + |ص|

10- |س−ص| ≥ | |س| − |ص| |

11- $\sqrt{س^2}$ = |س|

12- م ≥ س ≥ ل ⇐ |س| ≥ أكبر العددين |م| ، |ل|

ملحوظة: $س^2$ ≥ أ ⇔ |س| ≥ $\sqrt{أ}$ حيث أ عدد حقيقي موجب.

6- دالة "صحيح س" :

- الرمز [س] = أكبر عدد صحيح ≥ س
- الدالة د حيث د(س) = [س] نطاقها ح ومداها فئة الأعداد الصحيحة ي:

1- التعبير عن الدالة دون استخدام رمز الصحيح [ ]:

- الدالة [س] : لكل ن∋ ي تعرف كالآتي:

ن≥ س< ن + 1 ⇔ [س] = ن

- الدالة [أس] : لكل ن ∋ ي:

$\frac{ن}{أ} \le س < \frac{ن+1}{أ}$ ⇔ [أس] = ن

- الدالة [$س^2$] لكل ن∋ ي+ تعرف كالآتي:

$\sqrt{ن} \le |س| < \sqrt{ن+1}$ ⇔ [$س^2$] = ن

2- لكل س ∋ ح : [س] ≥ س < [س] + 1

3- لكل س ∋ ح : [س + ل] = [س] + ل حيث ل عدد صحيح.

ملحوظة: [س] يتغير تعريفها كل فترة طولها 1

[أ س] يتغير تعريفها كل فترة طولها $\frac{1}{أ}$

7- تماثل الدالة الحقيقية:

- لتكن د دالة حقيقية معرفة على الفئة ف .

1- د زوجية في ف ⇔ د(-س) = د(س) (لكل س ∋ف)

2- د فردية في ف ⇔ د(-س) = -د (س) (لكل س ∋ ف)

3- د ليست زوجية ولا فردية في ف ⇔ (-س) ≠ ± د(س)

ملحوظة: أغلب الدوال ليست زوجية ولا فردية.

8- الدوال المحدودة: لتكن د دالة حقيقية معرفة على الفئة ف.

1) د محدودة من أعلى في ف ⇔ أمكن إيجاد عدد ل ∋ ح بحيث د(س) ≤ل لكل س ∋ف

- يسمى ل حد علوي للدالة د في ف

2) د محدودة من أسفل في ف ⇔ أمكن إيجاد عدد م ∋ ح بحيث: د (س) ≥ م لكل س ∋ ف

- يسمى م حد سفلي للدالة في ف

3) د محدودة في ف ⇔ أمكن إيجاد عددين ل، م ∋ ح بحيث م ≤د(س) ≤ ل لكل س ∋ ف

تعريف مكافئ:

د محدودة في ف ⇔ أمكن إيجاد عدد ك >0 بحيث: |د(س) | ≤ ك لكل س ∋ ف

- سؤال: متى تكون د غير محدودة في فئة ف؟

الجواب: إذا كان لكل عدد ك > 0 يمكن إيجاد عدد س ∋ ف

بحيث |د ($س_0$)| ≥ ك

4) ك أصغر حد علوي للدالة د في ف ⇔ 1) ك حد علوي للدالة د

2) وإذا وجد حد علوي آخر ك′فإن ك:≤ ك′

1- دالة التغيرت:

لتكن د دالة حقيقية معرفة في] أ ، ب [:

ت : هـ ⟵ت د ($س_0$ + هـ) - د ($س_0$)

ونطاق هذه الدالة =]أ - $س_0$ ، ب - $س_0$[.

2- دالة متوسط معدل التغير م :

$$م_{س_0}(هـ) = \frac{د(س_0 + هـ) - د(س_0)}{هـ} \quad (هـ \neq 0)$$

ونطاق هذه الدالة =]أ- $س_0$ ، ب- $س_0$[

3- معدل تغير الدالة عند النقطة س =س0 :

إذا كانت $\lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{د(س + هـ) - د(س_0)}{هـ}$ = عدد حقيقي وحيد.

فإن هذه النهاية تسمى معدل تغير د عند $س_0$

- كما يسمى هذا المعدل مشتقة الدالة عند $س_0$ ويرمز له بالرمز $د'(س_0)$

4- قابلية الدالة للاشتقاق عند النقطة س = $س_0$:

د قابلة للاشتقاق عند $س_0$	$\Leftrightarrow$	1) $د(س_0) \in ح$ 2) $\lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{د(س_0 + هـ) - د(س_0)}{هـ}$ عدد حقيقي وحيد وتسمى هذه النهاية بالمشتقة عند $س_0$ ويرمز لها بالرمز $د'(س_0)$

ملحوظة: حالات عدم قابلية الدالة للاشتقاق عند $س_0$:

1- د غير معرفة عند $س_0$.

2- $\lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{د(س_0 + هـ) - د(س_0)}{هـ}$ ليس لها وجود

5- الدالة المشتقة د' :

هي دالة:

(1) نطاقها: أية فئة جزئية من الأعداد الحقيقية حيث د قابلة للاشتقاق.

(2) قاعدتها : هي قيمة المشتقة لكل س$\in$ نطاق د' ويرمز لها بالرمز د' (س) أ، $\frac{د ص}{د س}$.

ملحوظة: نطاق د' $\subset$ نطاق د .

6- المعنى الهندسي للمشتقة عند النقطة $س_0$:

$د'(س_0)$ = ميل المماس للمنحنى عند $س_0$ (ميل المنحنى)

7- [أ] معادلة المماس للمنحنى عند $س = س_0$:

$$ص - د(س_0) = د'(س_0)(س - س_0)$$

ملحوظة: المماس لمنحنى عند نقطة يكون:

1- موازياً محور السينات ⇔ $د'(س)=0$

2- ⊥ محور السينات ⇔ $د'(س)= \infty$.

3- موازياً مستقيم ميله م ⇔ $د'(س) = م$

4- ⊥ مستقيم ميله م ⇔ $د'(س) = \frac{-1}{م}$

5- صانعاً زاوية هـ مع الاتجاه الموجب لمحور س.

⇔ $د'(س) =$ ظا هـ

[ب] معادلة العمودي للمنحنى عند $س = س_0$:

$$ص - د(س_0) = \frac{-1}{د'(س_0)}(س - س_0)$$

- النقطة $(س_0، د(س_0))$ ، هي نقطة التماس.

8- المعنى الفيزيائي للمشتقة:

إذا كانت ف = م (ن) هي المسافة التي يقطعها جسم متحرك في خط مستقيم بعد زمن قدره ن ابتداء من نقطة ثابتة و فإن:

1- ف= م(ن) هي معادلة مسار الجسم في أي لحظة ن.

2- $م'(ن) = \frac{د ف}{د ن} = ع(ن)$ (السرعة في اللحظة ن)

3- $ع'(ن) = \frac{د ع}{د ن} = ج(ن)$ (العجلة في اللحظة ن)

ملحوظات:

1- إذا كانت السرعة ع (ن) > 0 فإن المسافة تتزايد.

2- إذا كانت السرعة ع (ن) < 0 فإن المسافة تتناقص.

3- إذا كانت السرعة ع(ن) = 0

فإن الجسم في حالة سكون لحظي (أو لحظة تغير اتجاه حركته)

4- إذا كانت العجلة جـ(ن) > 0 فإن السرعة تتزايد.

5- إذا كانت العجلة جـ(ن) <0 فإن السرعة تتناقص.

6- إذا كانت العجلة جـ(ن) = 0 فإن السرعة منتظمة.

7- إذا كانت المسافة ف(ن) = 0 فإن الجسم يعود لنقطة البدء .

9- قواعد عامة لحساب المشتقة ونطاقها:

	د(س)	د'(س)	شرط الاشتقاق
1-	جـ(دالة ثابتة)	صفر	لكل س ∈ ح
2-	$س^{ن}$، ن عدد صحيح موجب	$ن\, س^{ن-1}$	لكل س ∈ ح
3-	جـ. α (س)	جـ. α '(س)	α قابلة للاشتقاق عند س
4-	α(س) + β (س)	α '(س)+β ' (س)	كل من α ، β قابلة للاشتقاق عند س
5-	كثيرة الحدود في س	مجموع مشتقات حدودها	لكل س ∈ ح
6-	$\frac{1}{\alpha(س)}$	$\frac{-\alpha'(س)}{(\alpha(س))^2}$	• α قابلة للاشتقاق عند س. • α (س) ≠ 0
7-	α(س). β(س)	α(س).β' (س)+β(س).α'(س)	كل من α ، β قابلة للاشتقاق عند س
8-	$\frac{\alpha(س)}{\beta(س)}$	$\frac{\beta(س).\alpha'(س) - \alpha(س).\beta'(س)}{(\beta(س))^2}$	• كل من α ، β قابلة للاشتقاق عند س . • المقام β (س) ≠ 0
9-	ع = β(ص)...(1) ص=α(س)...(2)	$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس}$ قاعدة التسلسل	α قابلة للاشتقاق عند س β قابلة للاشتقاق عند α(س)
10-	$س^{\frac{1}{م}}$ ، م عدد صحيح موجب	$\frac{1}{م} س^{\frac{1}{م}-1}$	س ≠ 0
	د(س)	**د'(س)**	**شرط الاشتقاق**
11-	$س^{ن}$،(ن عدد قياسي)	$ن\, س^{ن-1}$	س ≠0 حين ن <1

-12	$\frac{د}{د س}(\alpha(س))^{ن}$	$ن(\alpha(س))^{ن-1} . \alpha'(س)$	حسب ن كما سبق
-13	$\sqrt{د(س)}$	$\frac{د'(س)}{2\sqrt{د(س)}}$	د(س) >0

10-مشتقات الدوال الدائرية:

	د(س)	د'(س)	شرط الاشتقاق
-1	جاس	جتاس	س ∋ ح
-2	جتاس	-جاس	س ∋ ح
-3	ظاس	$قا^2س$	$س \neq \frac{ط}{2} \pm ن ط$
-4	ظتاس	$-قتا^2س$	س ≠ ن ط
-5	قا س	قاس ظاس	$س \neq \frac{ط}{2} + ن ط$
-6	قتاس	-قتاس ظتاس	س ≠ ن ط

قاعدة عامة: $\frac{د}{د س}(دالة \quad دائرية)^{ن}$

= ن(الدالة)$^{ن-1}$ × مشتقة الدالة الدائرية× مشتقة الزاوية.

ثانياً: النظريات:

نظرية (1):

إذاكانت: د قابلة للاشتقاق عند النقطة $س_0$ التي تقع في نطاقها فإن: د تكون متصلة عند $س_0$.

البرهان:

نفرض أن س أي نقطة في نطاق د حيث $س \neq س_0$

- $د(س)-د(س_0) = \frac{د(س)-د(س_0)}{س-س_0} \times (س-س_0)$

$\Leftarrow د(س) = د(س_0) + \frac{د(س)-د(س_0)}{س-س_0} \times (س-س_0)$

- وبأخذ النهاية لكل من الطرفين عندما س ⇐ $س_0$:

$$\Leftarrow \lim_{س \to س_0} د(س) = \lim_{س \to س_0} د(س_0) + \lim_{س \to س_0} \frac{د(س) - د(س_0)}{س - س_0} \times \lim_{س \to س_0} (س - س_0)$$

$$= د(س_0) + د'(س_0) \times صفر = د(س_0) + صفر$$

أي $\lim_{س \to س_0} د(س) = د(س_0)$ ⇐ د متصلة عند س.

نظرية(2) :

إذا كانت: د(س) = جـ ثابت

فإن: د′ (س) = 0 لكل س ∋ ح

البرهان:

$$\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \frac{جـ - جـ}{هـ} = \frac{0}{هـ} = صفر$$

$$\Leftarrow \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = صفر \Leftarrow د'(س) = 0$$

نظرية (3):

إذا كانت : د(س) = س ن حيث ن عدد صحيح موجب.

فإن : د′(س)= ن س ن-1 (س∋ ح) .

البرهان:

- $$\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ})-\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}=\frac{(\text{س}+\text{هـ})^{\text{ن}}-\text{س}^{\text{ن}}}{\text{هـ}}$$

$$=\frac{1}{\text{هـ}}\left[\text{س}^{\text{ن}}+\binom{\text{ن}}{1}\text{س}^{\text{ن}-1}\,\text{هـ}+\binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{هـ}^{2}+\ldots\ldots+\text{هـ}^{\text{ن}}-\text{س}^{\text{ن}}\right]$$

(من مفكوك ذات الحدين)

$$=\frac{1}{\text{هـ}}\left[\binom{\text{ن}}{1}\text{س}^{\text{ن}-1}\,\text{هـ}+\binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{هـ}^{2}+\ldots\ldots+\text{هـ}^{\text{ن}}\right]$$

$$=\binom{\text{ن}}{1}\text{س}^{\text{ن}-1}+\binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{هـ}+\ldots\ldots+\text{هـ}^{\text{ن}-1}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ})-\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}=\binom{\text{ن}}{1}\text{س}^{\text{ن}-1}+\text{صفر}+\text{صفر}+\ldots\ldots+\text{صفر}$$

$= \text{ن}\ \text{س}^{\text{ق}-1}$ (عدد حقيقي وحيد)

$\Leftarrow$ $\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-1}$

نظرية (4):

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{جـ}.\ \alpha(\text{س})$ حيث جـ ثابت ، α قابلة للاشتقاق عند س.

فإن : (1) د قابلة للاشتقاق عند س

، (2) $\text{د}'(\text{س}) = \text{جـ}.\ \alpha'(\text{س})$

- $$\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ})-\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}=\frac{\text{جـ}.\,\alpha(\text{س}+\text{هـ})-\text{جـ}.\,\alpha(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$=\text{جـ}\times\frac{\alpha(\text{س}+\text{هـ})-\alpha(\text{س})}{\text{هـ}}$$

- $\lim_{هـ\to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = جـ \times \lim_{هـ\to 0} \frac{\alpha(س+هـ) - \alpha(س)}{هـ}$

= جـ . α' (س) =عدد حقيقي وحيد.

$\Leftarrow$ د'(س) = جـ. α' (س)

نظرية (5):

إذا كانت: د(س)= α(س)+β(س) حيث كل من α، β قابلة للاشتقاق عند س: فإن : 1) د قابلة للاشتقاق عند س 2) د' (س) = α' (س)+ β' (س)

البرهان:

- $\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = \frac{\alpha(س+هـ) + \beta(س+هـ) - (\alpha(س) - \beta(س))}{هـ}$

$= \frac{\alpha(س+هـ) - \alpha(س)}{هـ} + \frac{\beta(س+هـ) - \beta(س)}{هـ}$

- $\lim_{هـ\to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = \lim_{هـ\to 0} \frac{\alpha(س+هـ) - \alpha(س)}{هـ} + \lim_{هـ\to 0} \frac{\beta(س+هـ) - \beta(س)}{هـ}$

$= \alpha'(س) + \beta'(س)$ = عدد حقيقي وحيد

$\Leftarrow$ $د'(س) = \alpha'(س) + \beta'(س)$.

ملحوظة: يمكن كتابة المطلوب (2) في النظرية كالآتي:

$$\frac{د}{د س}\left(\alpha(س) + \beta(س)\right) = \frac{د}{د س}(\alpha(س)) + \frac{د}{د س}(\beta(س))$$

أ، $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$

نظرية (6):

إذا كانت م(س) = $\frac{1}{د(س)}$ حيث

د'(س) لها وجود، د(س) $\neq 0$

فإن: (1) م قابلة للاشتقاق عند س

2) $م'(س) = \frac{-د'(س)}{(د(س))^2}$

البرهان:

- $\frac{م(س+هـ) - م(س)}{هـ} = \frac{1}{هـ}\left(\frac{1}{د(س+هـ)} - \frac{1}{د(س)}\right)$

$= \frac{1}{هـ} \times \frac{د(س) - د(س+هـ)}{د(س+هـ).د(س)}$

$= \frac{د(س+هـ) \ د(س)}{هـ} \times \frac{-1}{د(س+هـ).د(س)}$

- $\lim_{هـ \to 0} \frac{م(س+هـ) - م(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} \times \lim_{هـ \to 0} \frac{-1}{د(س+هـ).د(س)}$

$= د'(س) \times \frac{-1}{د(س).د(س)}$

$= \frac{-د'(س)}{(د(س))^2} =$ عدد حقيقي وحيد.

$\Leftarrow م'(س) = \frac{-د'(س)}{(د(س))^2}$

نتيجة: إذا كانت : ن عدد صحيح سالب، $س \neq 0$

فإن: $\frac{د}{د س}(س^{ن}) = ن س^{ن-1}$

البرهان:

$\therefore$ ن $\in$ ي فبوضع ن = -ك حيث ك > 0

$\Leftarrow د(س) = س^{ن} = س^{-ك} = \frac{1}{س^{ك}}$

$د'(س) = \frac{-ك س^{ك-1}}{(س^{ك})^2}$ (من نظرية (6))

$= -ك\ س^{ك-1-2ك} = -ك\ س^{-ك-1}$

$= ق\ س^{ق-1}$ (بوضع – ك = ق)

نظرية (7):

إذا كانت : د(س) = α (س). β (س) حيث α ، β قابلتين للاشتقاق عند س.

فإن : (1) د قابلة للاشتقاق عند س

(2) د′(س)= α(س). β′ (س)+ β (س) . α′(س).

البرهان:

$$\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = \frac{\alpha(س+هـ).\beta(س+هـ) - \alpha(س)\,\beta(س)}{هـ}$$

$$= \frac{\alpha(س+هـ).\beta(س+هـ) - \alpha(س+هـ)\,\beta(س) + \alpha(س+هـ).\beta(س) - \alpha(س).\beta(س)}{هـ}$$

$$= \alpha(س+هـ) \times \frac{\beta(س+هـ) - \beta(س)}{هـ} + \beta(س) \times \frac{\alpha(س+هـ) - \alpha(س)}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \alpha(س+هـ) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{\beta(س+هـ) - \beta(س)}{هـ}$$

$$+ \lim_{هـ \to 0} \beta(س) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{\alpha(س+هـ) - \alpha(س)}{هـ}$$

$$= \alpha(س)\,\beta'(س) + \beta(س).\,\alpha'(س) = \text{عدد حقيقي}$$

$$\Leftarrow د'(س) = \alpha(س).\,\beta'(س) + \beta(س).\,\alpha'(س)$$

نتيجة هامة:

إذا كانت : د (س) = $\frac{\alpha(س)}{\beta(س)}$ حيث:

كل من α، β قابلة للاشتقاق عند س ، β(س) ≠ 0

فإن: (1) د قابلة للاشتقاق عند س.

(2) د' (س)

$$= \frac{\beta(س).\alpha'(س) - \alpha(س).\beta'(س)}{(\beta(س))^2}$$

البرهان:

- $د(س) = \frac{\alpha(س)}{\beta(س)} = \frac{1}{\beta(س)} \times \alpha(س)$

ومن مشتقة حاصل ضرب دالتين:

$$\Leftarrow د'(س) = \frac{1}{\beta(س)} . \alpha'(س) + \alpha(س) . \left(\frac{1}{\beta(س)}\right)'$$

$$\left[\text{ولكن } \frac{1}{\beta(س)} \text{ قابلة للاشتقاق عند س} \Leftarrow \left(\frac{1}{\beta(س)}\right)' = \frac{-\beta'(س)}{(\beta(س))^2} \right]$$

$$\Leftarrow د'(س) = \frac{1}{\beta(س)} . \alpha'(س) + \alpha(س) . \frac{-\beta'(س)}{(\beta(س))^2}$$

$$= \frac{\beta(س).\alpha'(س) - \alpha(س).\beta'(س)}{[\beta(س)]^2}$$

نظرية (8) قاعدة التسلسل:

إذا كانت الدالة α قابلة للاشتقاق عند النقطة س والدالة β قابلة للاشتقاق عند النقطة α (س) فإن:

- الدالة β o α تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة س ويكون :
- $(\beta o \alpha)'(س) = \beta'(\alpha(س)) . \alpha'(س)$

البرهان:

لتكن ص = α (س) ، ع =β (ص)

∴ ع = $(\alpha o \beta)$ (س) ، المطلوب $\frac{د ع}{د س}$؟

- إذا تغيرت س من س إلى س + Δس فإن Δص ، Δع هي التغيرات المناظرة في قيمتي ص، ع. وحيث أن الدالة α قابلة للاشتقاق عند النقطة س والدالة β قابلة للاشتقاق عند النقطة α (س) وبالتالي فهما متصلتان عند س ، α(س) .

∴ عندما Δ س ← 0 فإن : Δص ←0 ، Δع ← 0

- $\frac{\Delta ع}{\Delta س} = \frac{\Delta ع}{\Delta ص} \cdot \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ وباستخدام نظريات النهايات.

$$\Leftarrow \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ع}{\Delta س} = \lim_{\Delta ص \to 0} \frac{\Delta ع}{\Delta ص} \cdot \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$\Leftarrow \frac{د ع}{د س} = \frac{د ع}{د ص} \cdot \frac{د ص}{د س}$$ (كل منها له وجود)

$$\Leftarrow (\alpha o \beta)'(س) = \beta'(ص) \cdot \alpha'(س)$$

$$= \beta'(\alpha(س)) \cdot \alpha'(س)$$

نظرية (9):

إذا كان د (س) = س $^{\frac{1}{م}}$ ، م عدداً صحيحاً موجباً.

فإن : $د'(س) = \frac{1}{م} س^{\frac{1}{م}-1}$ (حيث س ≠0)

البرهان:

المطلوب: $\frac{د ص}{د س}$ ؟

م

- بوضع $ص = س^{\frac{1}{م}}$ $\therefore$ $ص^{م} = \left(س^{\frac{1}{م}}\right)^{م} = س$

وبوضع $ص^{م} = ع$ .... (1) $\Leftarrow$ $ع = س$ .... (2)

من قاعدة التسلسل:

$$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \cdot \frac{دص}{دس} \qquad .... (2)$$

ولكن من (1) $\frac{دع}{دس} = م\,ص^{م-1}$ ، من (2) $\frac{دع}{دس} = 1$

وبالتعويض في (3)

$$\therefore\ 1 = م\,ص^{م-1} \times \frac{دص}{دس}$$

$$\Leftarrow\ \frac{دص}{دس} = \frac{1}{م\,ص^{م-1}} = \frac{1}{م}\,ص^{1-م}$$

$$= \frac{1}{م}\left(س^{\frac{1}{م}}\right)^{1-م} = \frac{1}{م}\,س^{\frac{1}{م}-1}$$

أي $د'(س) = \frac{1}{م}\,س^{\frac{1}{م}-1}$ $(س \neq 0)$

نتيجة هامة: إذا كان ن أي عدد قياس وكانت $س \neq 0$ حين $ن < 1$ فإن:

$$\frac{د}{دس}\left(س^{ن}\right) = ن\,س^{ن-1}$$

البرهان:

- نفرض أن $ن = \frac{ل}{م}$ حيث $ل \in ي$، $م \in ي^{+}$
- ليكن $ع = س^{ن}$ (المطلوب $\frac{دع}{دس}$)

$$\Leftarrow\ ع = س^{\frac{ل}{م}} = \left(س^{\frac{1}{م}}\right)^{ل}$$

بوضع $ص = س^{\frac{1}{م}}$ .... (1)

$\Leftarrow ع = ص^{ل}$ .... (2)

وبالتالي $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{م} س^{\frac{1}{م}-1}$ من (1)، $\frac{د ع}{د ص} = ل ص^{ل-1}$ من (2)

- وباستخدام قاعدة التسلسل:

$$\frac{د ع}{د س} = \frac{د ع}{د ص} . \frac{د ص}{د س} = ل ص^{ل-1} \times \frac{1}{م} س^{\frac{1}{م}-1}$$

$$= \frac{ل}{م} \left(س^{\frac{1}{م}} \right)^{ل-1} \times س^{\frac{1}{م}-1} = \frac{ل}{م} س^{\frac{ل}{م}-\frac{1}{م}} \times س^{\frac{1}{م}-1}$$

$$= \frac{ل}{م} س^{\frac{ل}{م}-\frac{1}{م}+\frac{1}{م}-1} = \frac{ل}{م} س^{\frac{ل}{م}-1} \quad أي \quad \frac{د ع}{د س} = ن \ س^{ن-1}$$

نظرية (10):

لكل عدد حقيقي س: $\frac{د}{د س}\left(جا س\right) = جتا س$

البرهان:

لتكن د(س) = جا س

$$\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \frac{جا(س + هـ) - جا س}{هـ} = \frac{2 \ جتا \frac{س + هـ + س}{2} ، \frac{س + هـ - س}{2}}{هـ}$$

$$\Leftarrow \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} جتا \frac{2س + هـ}{2} \times \lim_{\frac{هـ}{2} \to 0} \frac{جا \frac{هـ}{2}}{\frac{هـ}{2}}$$

= جتاس × 1 = جتا س (عدد حقيقي)

$\Leftarrow د'(س) = جتا س$

نتيجة (1) : لكل عدد حقيقي س: $\frac{د}{د س}\left(جتا س\right) = -جا س$

البرهان:

$د(س) = جتا\ س = جا\left(\frac{ط}{2} - س\right)$

بوضع $ص = \frac{ط}{2} - س$ ، $د(س) = ع = جا\ ص$

فمن قاعدة التسلسل:

$$\frac{د ع}{د س} = \frac{د ع}{د ص} \cdot \frac{د ص}{د س} = جتا\ ص \times (-1)$$

$$= -\ جتا\left(\frac{ط}{2} - س\right) = -جا\ س$$

نتيجة (2): إذا كانت س عدداً حقيقياً ، $س \neq \frac{ط}{2} + ن\ ط$

حيث ن عدد صحيح فإن:

$$\frac{د}{د س}(ظا\ س) = قا^2 س$$

البرهان:

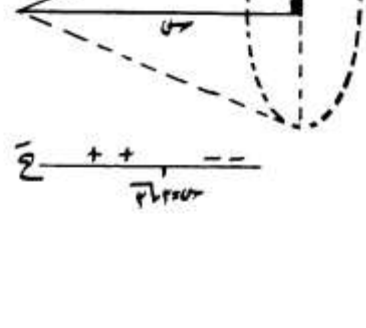
$$ظا\ س = \frac{جا\ س}{جتا\ س} \quad \left(جتا\ س \neq .\ أي\ س \neq \frac{ط}{2} + ن\ ط\right)$$

$$\Leftarrow \frac{د}{د س}(ظا\ س) = \frac{جتا\ س(جا\ س)' - جا\ س(\ جتا\ س)}{(\ جتا\ س)^2}$$

$$= \frac{جتا^2 س + جا^2 س}{جتا^2 س} = \frac{1}{جتا^2 س} = قا^2\ س$$

مثال: مثلث قائم الزاوية طول وتره 9سم، طول كل من ضلعي القائمة س، ص سم إذا دار المثلث حول أحد ضلعي القائمة دورة كاملة، أوجد أكبر حجم ممكن للمخروط الناتج عن الدوران.

الحل:



حجم المخروط = $\frac{1}{3}\ نق^2 \pi\ ع = \frac{1}{3} ص^2\ \pi\ س$

لكن $س^2 + ص^2 = 81$

$$\therefore\ ح = \frac{\pi}{3} س(81 - س^2) = \frac{\pi}{3}(81 س - س^3)$$

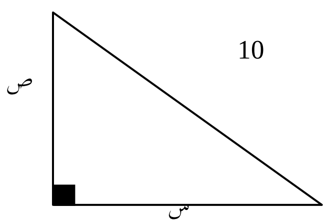
$$ح' = \frac{\pi}{3}(81 - 3 س^2) = 0 \Leftarrow س^2 = 27$$

∴ س = $3\sqrt{3}$

بالنظر إلى إشارة ح فإن الحجم أكبر ما يمكن عند س = $3\sqrt{3}$

وهو ح = $\frac{\pi}{3} \times 3\sqrt{3}\,(81-27) = 54\pi\sqrt{3}$ سم^3

مثال: مثلث قائم الزاوية طول وتره 10سم. إذا كان طول ضلعي القائمة س، ص . أوجد أكبر قيمة للمقدار س $\sqrt{3}$+ص



الحل: المقدار ك = س + $\sqrt{3}$ص = س + $\sqrt{3}\sqrt{100-س^2}$

$ك' = 1 + \sqrt{3} \times \frac{-2س}{2\sqrt{100-س^2}} = 0 \Leftarrow 1 = \frac{\sqrt{3}س}{\sqrt{100-س^2}}$

بتربيع الطرفين فإن $1 = \frac{9س^2}{100-س^2} \Leftarrow 100 - س^2 = 9س^2$

∴ $100 = 10س^2 \Leftarrow س^2 = 10 \Leftarrow س = \sqrt{10}$

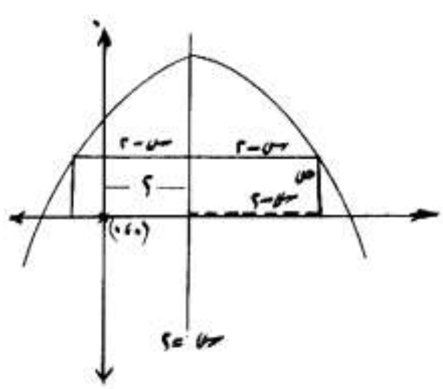
من إشارة ك' جانباً فإن ك أكبر ما يمكن عند س = $\sqrt{10}$

وهو $\sqrt{10} + 3\sqrt{100-10} = \sqrt{10} + 3\sqrt{90}$

$= \sqrt{10} + 9\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$

ك' ـــــــ س = $\sqrt{10}$

مثال: أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى ق(س) = 8−س^2 + 4س



الحل: نجد معادلة محور التماثل بوضع

ق' (س) = 0 ⇐ −2س+ 4 = 0

∴ س = 2 (معادلة محور التماثل)

∴ قاعدة المستطيل = 2(س−2) / الشكل

م = مساحة المستطيل

= ص × 2 (س−2) = (8−س^2 + 4س) (2س− 4)

م' = (8−س^2 + 4س) × 2 + (2س − 4) (−2س

∴ 16−2س^2 + 8س − 4س^2 + 8س + 8س − 6

∴ −6س^2 + 24 س = 0 ⇐ −6س (س−4) =0

⇐ س = 4

م" = −12س + 24 < 0 عند س = 4

∴ المساحة أكبر ما يمكن عند س = 4 وهي $م\Big|_{س=4} = (8-4)(8-16+16) = 32$ وحدة مربعة.

مثال: ليكن $ق'(س) = \begin{cases} 2س^2 - 5، & س \geq 2 \\ 2س - 1، & س < 2 \end{cases}$ بين باستخدام التعريف أن ق′(2) غير موجودة.

الحل:

$$ق'(س) = \lim_{ع \leftarrow 2} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - 2} \Leftarrow ق'(2) = \lim_{ع \leftarrow 2} \frac{ق(ع) - ق(2)}{ع - 2}$$

$$ق'(2+) = \lim_{ع \leftarrow 2^+} \frac{2ع^2 - 5 - (8-5)}{ع - 2} = \lim_{ع \leftarrow 2^+} \frac{2ع^2 - 8}{ع - 2} \lim_{ع \leftarrow 2^+} \frac{2(ع-2)(ع+2)}{ع - 2}$$

$$ق'(2-) = \lim_{ع \leftarrow 2^-} \frac{2ع - 1 - (8-5)}{ع - 2} = \lim_{ع \leftarrow 2^-} \frac{2ع - 4}{ع - 2} = \lim_{ع \leftarrow 2^-} \frac{2(ع-2)}{ع - 2} = 2$$

لكن $ق'(2+) \neq ق'(2-)$ ∴ $ق'(2)$ غير موجودة.

مثال: ليكن ق(س) = [س−1] بين باستخدام التعريف أن ق′(5) غير موجودة.

الحل: نعيد تعريف ق(س) حول س= 5 كما يلي:

$$ق(س) = \begin{cases} 3، & 4 \leq س < 5 \\ 4، & 5 \leq س < 6 \end{cases}$$

$$ق(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} \Leftarrow ق(5) = \lim_{ع \leftarrow 5^-} \frac{ق(ع) - ق(5)}{ع - 5}$$

$$\therefore ق'(5-) = \lim_{ع \leftarrow 5^-} \frac{3-4}{ع - 5} = \frac{-1}{\text{صفر}}$$ غير موجودة

$$ق'(5+) = \lim_{ع \leftarrow 5^+} \frac{ق(ع) - ق(5)}{ع - 5} = \lim_{ع \leftarrow 5^+} \frac{4-4}{ع - 5} = \text{صفر}$$

∴ $ق'(5)$ **غير موجودة** لأن $ق'(5+) \neq ق'(5-)$

مثال: إذا كان ق′(س)= $س^2$ فجد $\lim_{هـ \leftarrow 0} \frac{ق(س + 3هـ) - ق(س)}{4هـ}$

الحل:

نفرض 3 هـ = ع ⇐ ع ← 0 عندما هـ ← 0 ، $هـ = \frac{ع}{3}$

$$\therefore\ \lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{ق}(\text{س}+3\,\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}=\lim_{\text{ع}\to 0}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{4\times\frac{\text{ع}}{3}}$$

$$=\frac{3}{4}\times\text{ق}'(\text{س})=\frac{3}{4}\text{س}^{2}$$

مثال: إذا كان ق(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$، ن عدد موجب فأثبت أن ق′ (س) = ق $\text{س}^{\text{ن}-1}$.

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س})=\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}=\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{(\text{س}+\text{هـ})^{\text{ن}}-\text{س}^{\text{ن}}}{\text{هـ}}$$

حسب نظرية ذات الحدين

$$(\text{س}+\text{هـ})^{\text{ن}}=\binom{\text{ن}}{0}\text{س}^{\text{ن}0}\,\text{هـ}+\binom{\text{ن}}{1}\text{س}^{\text{ن}-1}.\text{هـ}^{1}+\binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{هـ}^{2}+\ldots+\binom{\text{ن}}{\text{ن}}\text{س}^{0}\,\text{هـ}^{\text{ن}}$$

$$=\text{س}^{\text{ن}}+\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}\text{هـ}+\binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}+\ldots.+\text{هـ}^{\text{ن}}$$

$$\text{ق}'(\text{س})=\lim\frac{\text{س}^{\text{ن}}+\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}\text{هـ}+\binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}\text{هـ}^{2}+\ldots+\text{هـ}^{\text{ن}}-\text{س}^{\text{ن}}}{\text{هـ}}=\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{هـ}\left(\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}+\binom{\text{ن}}{2}\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{هـ}+\ldots+\text{هـ}^{\text{ن}-1}\right)}{\text{هـ}}$$

$$=\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}+0=\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

مثال: إذا كان ل(س) =(س−أ).ق(س) حيث ق(س) اقتران متصل عند س = أ. استخدم تعريف المشتقة في إثبات أن ق(أ) = ل′ (أ) حيث م ثابت.

الحل:

بموجب التعريف $\text{ل}'(\text{أ})=\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{ل}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{ل}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

$$\therefore\ \text{ل}'(\text{أ})=\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{((\text{أ}+\text{هـ})-\text{أ})\text{ق}.(\text{أ}+\text{هـ})-(\text{أ}+\text{أ})0\text{ق}(\text{أ}))}{\text{هـ}}$$

$$=\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{(\text{أ}+\text{هـ}-\text{أ}).\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})-\text{صفر}\,(\text{ق}(\text{أ})))}{\text{هـ}}$$

$$=\lim_{\text{ن}\to 0}\frac{\text{هـ}\,\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})}{\text{هـ}}=\lim_{\text{هـ}\to 0}\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ})=\text{ق}(\text{أ})$$

وهو المطلوب

مثال: استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد ق′(س) للاقتران ق(س) = $\frac{2س}{س - 3}$ ، س ≠ 3.

الحل:

بموجب التعريف:

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{\frac{2(س + هـ)}{(س + هـ) - 3} - \frac{2س}{س - 3}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\frac{2س + 2هـ}{س + هـ - 3} - \frac{2س}{س - 3}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{2س^2 + 2هـس - 6س - 6هـ - 2س^2 - 2س هـ + 6س}{(س + هـ - 3)(س - 3)} \times \frac{1}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-6}{(س + هـ - 3)(س - 3)} = \frac{-6}{(س + هـ - 3)(س - 3)} = \frac{-6}{(س - 3)^2}$$

مثال: جد $\frac{د ص}{د س}$ للاقتران ص = ق(س)= $\sqrt{س}$ باستخدام التعرف عند (1)س= صفر (2) س = 2 .

الحل:

1- $ق'(0) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(0 + هـ) - ق(0)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{\sqrt{0 + هـ} - \sqrt{0}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{\sqrt{هـ}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{1}{\sqrt{هـ}} = \frac{1}{0}$

∴ المشتقة غير موجودة عند س =صفر

2- $ق'(2) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(2 + هـ) - ق(2)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{\sqrt{2 + هـ} - \sqrt{2}}{هـ}$

بضرب البسط والمقام بالمرافق ($\sqrt{2 + هـ} + \sqrt{2}$):

$$\text{ق}'(2) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{\sqrt{2+\text{هـ}} - \sqrt{2}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{2+\text{هـ}} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+\text{هـ}} + \sqrt{2}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{2 + \text{هـ} - 2}{\text{هـ}\left(\sqrt{2+\text{هـ}} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}\left(\sqrt{2+\text{هـ}} + \sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

مثال: ق(س) = 2س |3−س| أوجد متوسط تغير ق(س) في [−2، 3] .

الحل:

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\text{ق}(3) - \text{ق}(-2)}{3 - -2} = \frac{6 \times |\text{صفر}| - 2 \times -2|2 + 3|}{5}$$

$$= \frac{\text{صفر} + 4 \times 5}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

مثال: ق(س) = $\sqrt{2\text{س} + 1}$ ، متوسط التغير ق(س) على [أ ، 0] يساوي 2 ما قيمة أ .

الحل:

$$\frac{\text{ق}(0) - \text{ق}(\text{أ})}{-\text{أ}} = 2 \Leftarrow \frac{1 - \sqrt{2\text{أ} + 1}}{-\text{أ}} = 2$$

$$\therefore 1 - \sqrt{2\text{أ} + 1} = -2\text{أ} \Leftarrow 1 + 2\text{أ} = \sqrt{2\text{أ} + 1}$$

$$\therefore (1 + 2\text{أ})^2 = 2\text{أ} + 1 \Leftarrow 1 + 4\text{أ} + 4\text{أ}^2 = 2\text{أ} + 1$$

$$4\text{أ}^2 + 2\text{أ} = 0$$

$$\text{أ}(4\text{أ} + 2) = 0 \to \text{أ} = 0 \text{ ، } -\frac{1}{2} \quad \text{لكن } \text{أ} \neq 0 \quad \therefore \text{أ} = \frac{-1}{2}$$

مثال: إذا كان ق(س)= أ س ^{3} − ب س ^{2} + 10 ، متوسط التغير على [0، 2]=(−2) ومتوسط التغير على [3،1] = 6 أوجد أ ، ب

الحل:

$$\frac{\text{ق}(2) - \text{ق}(0)}{2} = -2 \Leftarrow \frac{8\text{أ} - 4\text{ب} + 10 - 10}{2} = -2$$

$$\therefore\ 8\text{أ} - 4\text{ب} = -4 \quad \ldots\ldots\ (1)$$

كذلك $\dfrac{\text{ق}(3) - \text{ق}(1)}{2} = 6 \Leftarrow \dfrac{27\text{أ} - 9\text{ب} + 10 - (\text{أ} - \text{ب} + 10)}{2} = 6$

$$\therefore\ 26\text{أ} - 8\text{ب} = 12 \Leftarrow 13\text{أ} - 4\text{ب} = 6 \quad \ldots\ldots\ (2)$$

من (1)، (2) $\quad 8\text{أ} - 4\text{ب} = -4$

$$\underline{-\ 13\text{أ} \mp 4\text{ب} = -6}$$

$-5\text{أ} = -10 \leftarrow \text{أ} = 2$، بالتعويض نجد ب $= 5$

مثال: إذا كان متوسط تغير ق(س) على [3،0] يساوي (10) وإذا كان هـ(س) = 3ق(س) − 5س أوجد متوسط تغير هـ(س) على [0، 3].

الحل:

المعطيات $\dfrac{\text{ق}(3) - \text{ق}(0)}{3} = 10$

المطلوب $\dfrac{\text{هـ}(3) - \text{هـ}(0)}{3} = \dfrac{(3\text{ق}(3) - 15) - (3\text{ق}(0) - 0)}{3}$

$$= \frac{3\text{ق}(3) - 3\text{ق}(0) - 15}{3}$$

$$= 3\left(\frac{\text{ق}(3) - \text{ق}(0)}{3}\right) - 5$$

$$= 3 \times 10 - 5 = 25$$

مثال: أوجد متوسط التغير $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ إذا كانت ص = س^2 − س+1 عندما س$_1$ = 2 ، Δس = 2.

الحل:

متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(\text{س}_1 + \Delta \text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ق}(2+2) - \text{ق}(2)}{2}$

$$= \frac{(16 - 4 + 1) - (4 - 2 + 1)}{2} = \frac{13 - 3}{2} = 5$$

مثال: إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق في [−1،2] يساوي (−3) وكان هـ(س) = ق(س) − س^2. أوجد متوسط تغير الاقتران هـ (س) في [−1،2] .

الحل:

من المعطيات : $\frac{\text{ق}(1)-\text{ق}(-2)}{3} = -3$ لكن المطلوب $\frac{\text{هـ}(1)-\text{هـ}(-2)}{3}$

$$= \frac{(\text{ق}(1)-1)-(\text{ق}(-2)-4)}{3} = \frac{\text{ق}(1)-\text{ق}(-2)}{3} + \frac{3}{3} = -3+1 = -2$$

مثال: إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}+1}$ معرفاً على [0، ب] وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س ص. إلى ب يساوي $\frac{1}{3}$. جد قيمة الثابت ب.

الحل:

متوسط التغير = $\frac{\text{ق(ب)}-\text{ق}(0)}{\text{ب}} = \frac{\sqrt{\text{ب}+1}-1}{\text{ب}} = \frac{1}{3}$

$\therefore 3\sqrt{\text{ب}+1}-3 = \text{ب} \Leftarrow 3\sqrt{\text{ب}+1} = \text{ب}+3$ / وبتربيع الطرفين

$9(\text{ب}+1) = \text{ب}^2 + 6\text{ب} + 9$

$\therefore 9\text{ب} + 9 = \text{ب}^2 + 6\text{ب} + 9 \Leftarrow \text{ب}^2 - 3\text{ب} = 0$

ب(ب−3) = 0 ← ب = 0 ، 3 لكن ب > 0 ∴ ب = 3

مثال: ليكن ق(س) = س^2 [س+ 1] أوجد ق′(1.5) ، ق′(2).

الحل: نعيد تعريف ق(س) على فترة تحوي العددين المطلوبين 1.5 ، 2

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 \times 2 \ \text{،} & 1 \le \text{س} < 2 \\ \text{س}^2 \times 3 \ \text{،} & 2 \le \text{س} < 3 \end{cases}$$

لاحظ أن ق(س) غير متصل عند س = 2 لأن

$$\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{ق(س)} = 12 \ne \lim_{\text{س} \to 2^-} \text{ق(س)} = 8$$

∴ ق′ (2) غير موجودة.

أما لإيجاد ق′ (1.5) فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{س} \ \text{،} & 1 < \text{س} < 2 \\ \text{غير موجودة} \ \text{،} & \text{س} = 2 \\ 6\text{س} \ \text{،} & 2 < \text{س} < 3 \end{cases}$

حيث ق′ (1.5) = 4 × 1.5 = 6

مثال: إذا كان ق(س)= س^5 أوجد $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(2+\text{هـ})-\text{ق}(2)}{\text{هـ}}$

الحل:

$$\underset{هـ\to 0}{\text{نها}}\ \frac{ق(2+هـ)-ق(2)}{هـ}=ق'(2)$$ حسب تعريف المشتقة

لكن ق (س) = 5س^4 ⇐ ق′ (2) = 5× 2 ^{4} = 5 × 16 = 80

مثال: إذا كان ق(س) = 2س^3 − 4س^2 أوجد $\underset{ع\to 1}{\text{نها}}\ \frac{ق(ع)-ق(1)}{ع-1}$

الحل:

$$\underset{ع\to 1}{\text{نها}}\ \frac{ق(ع)-ق(1)}{ع-1}=ق'(1)$$ حسب تعريف المشتقة

لكن ق′(س) = 6س^2 − 8س ← ق′(1) = 6− 8 = −2

مثال: إذا علمت أن ق(س+ هـ) = ق(س) × ق(هـ) وكان ق(0) = 1 ، ق′(0)= 2 أثبت أ، ق′(س) = 2ق(س) .

الحل:

نضع ق(س+هـ) = ق(س) × ق(هـ) وبطرح ق(س) من الطرفين.

∴ ق(س+هـ) − ق(س) = ق(س9 × ق(هـ) − ق(س)

$$\therefore \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}=\frac{ق(س)\times ق(هـ)-ق(س)}{هـ}=ق(س)\left(\frac{ق(هـ)-1}{هـ}\right)$$

$$\therefore \underset{هـ\to 0}{\text{نها}}\ \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}=\underset{هـ\to 0}{\text{نها}}\ \frac{ق(س)\left(ق(هـ)-1\right)}{هـ}$$ لكن ق (0) = 1

$$\therefore ق'(س)=ق(س)\times \underset{هـ\to 0}{\text{نها}}\ \frac{ق(هـ)-ق(0)}{هـ\to 0}=ق(س)\times ق'(0)$$

$$\therefore ق'(س)=ق(س)\times 2 \text{ أي أن } ق'(س)=2ق(س)$$

مثال: أوجد معدل التغير في مساحة سطح كرة بالنسبة لنصف قطرها في اللحظة التي فيها نصف القطر 4 سم.

الحل:

م $_{\text{الكرة}}$= 4نق^2 π

$$\frac{د\,م}{د\,نق}=8\ نق\ \pi \Leftarrow \left.\frac{د\,م}{د\,نق}\right|_{نق=4}=8\times 4\pi=32\pi$$

مثال: إذا كان ق(س) = س×ل(س). أثبت باستخدام تعريف المشتقة أن ق′(س)= س× ل′(س) + ل(س).

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع ل}(\text{ع}) - \text{س ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع ل}(\text{ع}) - \text{س ل}(\text{س}) + \text{ع ل}(\text{س}) - \text{ع ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$ / إضافة وطرح $\text{ع} \times \text{ل}(\text{س})$ للبسط

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}\left(\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})\right)}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع ل}(\text{س}) - \text{س ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}\left(\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})\right)}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ل}(\text{س})(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{س} \times \text{ل}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})$$

مثال: إذا كان ق'(4) = 2ق''(4) = 8 . أوجد $\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(4)}{\text{س}^2 - 16}$

الحل:

$$\text{ق}'(4) = 8 \text{، ق}''(4) = 4 \quad\text{،}\quad \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(4)}{\text{س} - 4} \times \frac{1}{\text{س} + 4}$$

لكن $\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(4)}{\text{س} - 4} = \text{ق}''(4)$ حسب تعريف المشتقة.

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(4)}{\text{س} - 4} \times \frac{1}{\text{س} + 4} = \text{ق}''(4) \times \frac{1}{8} = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

مثال: إذا كانت ص = 8س − س^2 . أوجد :

1) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ 2) $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} - \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

الحل:

1- $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 8 - 2\text{س}$ ، $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{8(\text{س} + \Delta\text{س}) - (\text{س} + \Delta\text{س})^2 - (8\text{س} - \text{س}^2)}{\Delta\text{س}}$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{8\text{س} + 8\Delta\text{س} - \text{س}^2 - 2\text{س}\,\Delta\text{س} - (\Delta\text{س})^2 - 8\text{س} + \text{س}^2}{\Delta \text{س}}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = 8 - 2\text{س} - \Delta\text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = (8 - 2\text{س}) - (8 - 2\text{س} - \Delta\text{س}) = \Delta\text{س}$$

$$2-\quad \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$$

مثال: إذا كان ق(س) $= \frac{3\text{س}}{[2\text{س}]}$ أوجد ق′ (3.2)

الحل: عند س = 3.2 يكون المقام [6.4] = 6

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{6} = \frac{1}{2}\text{س}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{2} \leftarrow \text{ق}'(3.2) = \frac{1}{2}$$

مثال: $\frac{|3\text{س} - 2|}{|8\text{س} - 4|}$ أوجد ق′(1).

الحل:

عند س = 1 تكون قاعدة البسط 3س − 2 وتكون قاعدة المقام هي 8س− 4 ويكون $\frac{3\text{س} - 2}{8\text{س} - 4}$.

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(8\text{س} - 4)(3) - (3\text{س} - 2)(8)}{(8\text{س} - 4)^2}$$

$$\text{ق}'(1) = \frac{(8 - 4)(3) - (3 - 2)(8)}{(8 - 4)^2} = \frac{12 - 8}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

مثال: إذا كان ق(س) $\begin{cases} \text{س}^2 - \text{أ س} & ، \text{ س} < 2 \\ \text{ب} - \text{س} & ، \text{ س} \geq 2 \end{cases}$ فجد قيمة كل من أ ، ب التي تجعل ق قابلاً للاشتقاق عند س = 2 .

الحل:

ق(2) موجودة ⇐ ق(س) متصل عند س = 2

أي: $\lim_{س \to 2^-} س^2 - أس = \lim_{س \to 2^+} ب - س$

$4 - 2أ = ب - 2$

ب = 6 - 2 أ .... (1)

وبما أن ق′(2) موجودة:

$ق'_-(2) = ق'_+(2)$

2 (2) - أ = -1

4 - أ = -1 ⇐ أ = 5 ....(2)

نعوّض عن أ = 5 في معادلة (1)

ب = 6 - 2 (5) = 6 - 10 = -4

∴ ب = -4

مثال: إذا كان ق(س) = $|4 - س^2|$ اقتراناً متصلاً معرفاً على ح ، فجد :

1- ق′(س).

2- قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق مبيناً السبب في ذلك.

الحل:

1- بإعادة تعريف ق(س) $4 - س^2$ = صفر ⇐ س = ± 2

$س^2 - 4$ | $4 - س^2$ | $س^2 - 4$

-2 | 2

$$ق(س) = \begin{cases} -4 + س^2 &، \quad س < -2 \\ 4 - س^2 &، \quad -2 \le س < 2 \\ -4 + س^2 &، \quad س \ge 2 \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} 2س &، \quad س < -2 \\ -2س &، \quad -2 < س < 2 \\ 2س &، \quad س > 2 \\ \text{غير موجودة} &، \quad س = 2 ، س = -2 \end{cases}$$

2- ق′(2) غير موجودة لأن $ق'_-(2) \ne ق'_+(2)$

حيث $ق'_-(2) = -4$ ، $ق'_+(2) = 4$

$ق'(-2)$ غير موجودة لأن $ق'_-(-2) \ne ق'_+(-2)$

حيث $ق'_-(-2) = -4$ ، $ق'_+(-2) = 4$

مثال: أوجد قيم س التي يكون عندها ق(س) غير قابل للاشتقاق فيما يلي:

1- ق(س) = $6س^3 - 7س^2$ ، س ∈ [-1، 5] .

2- (س) = |س-1| ، س ∈[0، 3]

3- ق(س) = [- س+1] ، س ∈ [-2، صفر]

4- ق(س) = $\sqrt{س-2}$

5- ق(س) = $\begin{cases} س^2 - 2 & ، -2 \le س \le 2 \\ \frac{|س|}{3 - س} & ، 2 < س < 10 \end{cases}$

الحل:

1- ق(س) = $6س^3 - 7س^2$ ، س ∈ [-1، 5]

ق كثير حدود ⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند أطراف الفترة فقط أي عند س = -1، س = 5.

2- ق(س) = |س-2| ، س ∈ [0، 3]

$ق'_-(2) = -1$ ، $ق'_+(2) = 1$ ق′ (2) غير موجودة.

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س ∈ {0 ، 2 ، 3}

3- ق(س) = [- س+1] ، س∈ [-2، صفر]

طول الدرجة = 1

ق(س) = $\begin{cases} 3 & ، س = -2 \\ 2 & ، -2 < س \le -1 \\ 1 & ، -1 < س \le صفر \end{cases}$

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = -2 ، -1 ، صفر حيث أن ق غير متصل عند س = -2 ، س = -1 .

4- ق(س) = $\sqrt{س-2}$ ، س ≥ 2

$$ق^{/}(س) = \frac{1}{\sqrt{س - 2}\,-2}$$

ق غير قابل للاشتقاق عند س = 2 (صفر المقام) وهو طرف الفترة.

5- $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 2 & ، \quad -2 \leq س \leq 2 \\ \frac{|س|}{3 - س} & ، \quad 2 < س \leq 10 \end{cases}$

نبحث الاتصال عند س = 2:

$$\lim_{س \to 2^-} س^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\lim_{س \to 2^+} \frac{|س|}{3 - س} = \lim_{س \to 2^+} \frac{س}{3 - س} \quad \text{(لأن 2 > صفر)}$$

$$= \frac{2}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

ق(2) = 2 $\lim_{س \to 2}$ ق(س) ⟸ ق متصل عند س = 2

نبحث الاشتقاق عند س = 2.

$$ق^{/}_{-}(2) = 2(2) = 4 \quad ، \quad ق^{/}_{+}(2) = \frac{(3-2)\times 1 - (2)\times -1}{(3-2)^2} = \frac{3}{1} = 3$$

$ق^{/}_{-}(2) \neq ق^{/}_{+}(2)$ ∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = -2، 2 ، 10

مثال: إذا كان ق(س)= س جاس أوجد ق $^{//}$(س)

الحل:

ق $^{/}$(س) = س جتا س + جاس

ق $^{//}$(س) = س×−جاس + جتاس + جتاس

= −س جا س + 2 جتاس

مثال: إذا كان ص = 5 + 4جا2س + 3جتا2س برهن أن ص $^{//}$ + 4 ص = 20

الحل: ص $^{/}$ = 8جتا 2س − 6جا2س

ص $^{//}$ = −16 جا2س − 12جتا2س

∴ ص $^{//}$ +4ص=−16 جا2س − 12 جتا2س + 4 (5+4جا2س+3جتا2س)

= −16 جا2س − 12 جتا2س + 20 + 16 جا2س + 12 جتا2س

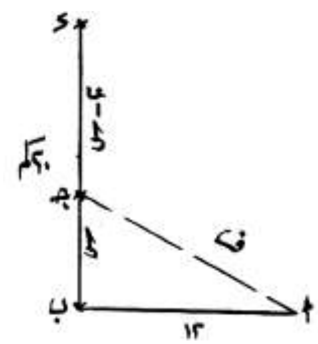
مثال: تريد شركة أن تمد أنبوباً للنفط من النقطة (أ) في عرض البحر إلى النقطة (د) الواقعة على شاطئ مستقيم إذا كانت النقطة (ب) تقع على هذا الشاطئ وهي أقرب نقطة إلى (أ) وكانت المسافة أب= 12 كم. والمسافة ب د = 20 كم، عين موقع النقطة جـ على الشاطئ بين ب، د بحيث تكون تكلفة مد الأنبوب من أ إلى د مروراً بالنقطة جـ أقل ما يمكن. علماً بأن تكلفة مد الكيلومتر الواحد من الانبوب تحت الماء هي (50000)دينار وتكلفة مدّه على الشاطئ (30000) دينار.

الحل:

ف = $\sqrt{س^2+144}$ ⇐ تكلفة مد الخط البحري = $\sqrt{س^2+144}\times 50000$

أما الخط البري 20−س فتكلفته هي (20−س) × 30000

∴ التكاليف الكلية = ت = $50000\sqrt{س^2+144} + 30000(20-س)$



$$ت' = 50000 \times \frac{2س}{2\sqrt{س^2+144}} + 30000 \times -1 = 0$$

$$\Leftarrow \frac{50000 س}{\sqrt{س^2+144}} = 30000$$

$$\Leftarrow \frac{25 س^2}{س^2+144} = 9$$ (بتربيع الطرفين)

∴ $9س^2 + 9 \times 144 = 25 س^2 \Leftarrow 9 \times 144 = 16 س^2 \Leftarrow س^2 = 9 \times 9$

∴ س = 9

من إشارة ت' فإن التكاليف أقل ما يمكن عند س = 9 أي بعد جـ عن ب 9 كم لتكون تكلفة مدّ الأنبوبين أقل ما يمكن.

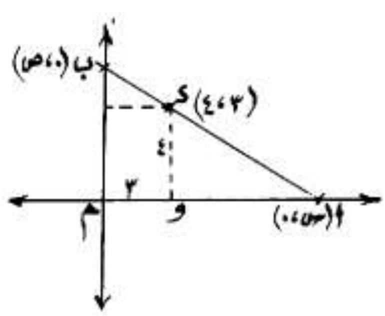
--- 9 +++

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (3،4) ويقطع من الربع الأول للمستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن.

الحل:

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ س ص لكن من تشابه المثلثين أ و د ، أ م ب فإن $\frac{س-3}{س} = \frac{4}{ص}$

$$ص = \frac{4س}{س-3}$$



∴ مساحة المثلث = م = $\frac{1}{2} س \times \frac{4س}{س-3} = \frac{2س^2}{س-3}$

$$\therefore\ م' = \frac{(س-3)\times 4س - 2س^2 \times 1}{(س-3)^2} = 0 \Leftarrow 4س^2 - 12س - 2س^2 = 0$$

$$\therefore\ 2س^2 - 12س = 0 \Leftarrow 2س\,(س-6) = 0 \Leftarrow س = 6$$

من إشارة م′ فإن م أقل ما يمكن عند س = 6

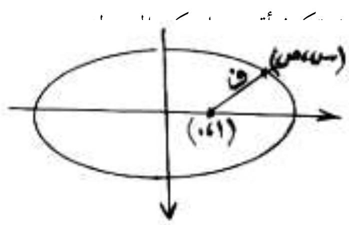


لكن نريد معادلة المستقيم الواصل بين (4،3) ، (0،6)

حيث الميل = $\frac{4-0}{3-6} = \frac{-4}{3}$ المعادلة $ص - 4 = -\frac{4}{3}(س-3)$

$$\therefore\ ص - 4 = \frac{-4}{3}س + 4 \Leftarrow ص = -\frac{4}{3}س + 8$$

مثال: طريق حول مدينة معادلته هي $5س^2 + 10ص^2 = 50$ ، النقطة (0.1) تمثل موقع مولد كهرباء. أوجد إحداثيات النقط على الطريق التي يمكن أن يوضع عندها محطة محروقات ... الكهرباء ثم أوجد المسافة بين المحطة والمولد.



الحل:

$$ف = \sqrt{(س-1)^2 + ص^2} = \sqrt{س^2 - 2س + 1 + ص^2}$$

لكن $10ص^2 = 50 - 5س^2 \Leftarrow ص^2 = 5 - \frac{1}{2}س^2$

$$\therefore\ ف = \sqrt{س^2 - 2س + 1 + 5 - \frac{1}{2}س^2} = \sqrt{\frac{1}{2}س^2 - 2س + 6}$$

$$ف' = \frac{س-2}{2\sqrt{\frac{1}{2}س^2 - 2س + 6}} = 0 \Leftarrow س - 2 = 0 \quad \therefore\ س = 2$$

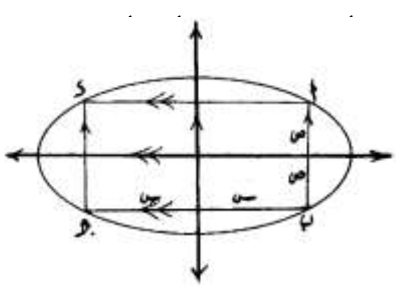
ف′   − − − | + + +   (س=2)

وعندها $ص^2 = 3$ أي $ص = \pm\sqrt{3}$

من إشارة ف فإن المسافة أقل ما يمكن عند س=2 ∴ يوجد نقطتان على المنحنى هما $(2 ، \pm\sqrt{3})$ وتكون

عند ذلك $\sqrt{\frac{1}{2}\times 4 - 4 + 6} = \sqrt{4} = 2$

مثال: أ،ب ، جـ، د أربع نقط على منحنى القطع الناقص $س^2 + 4ص^2 = 8$ وكان أ ب جـ د مستطيلاً ضلعاه أب، جـ د يوازيان المحور الأصغر وضلعاه ب جـ، أ د يوازيان ا ... ممكنة للمستطيل أب جـ د.



الحل:

لاحظ أن محوري السينات والصادات محاور تماثل للمستطيل.

مساحة المستطيل = 2س × 2ص

$= 4$س ص

لكن $س^2 + 4ص^2 = 8 \Leftarrow س^2 = 8 - 4ص^2$

$\therefore س = \sqrt{8 - 4ص^2}$

$\therefore م_{المستطيل} = 4\sqrt{8 - 4ص^2} \times ص = 4\sqrt{8ص^2 - 4ص^4}$

$$م' = 4 \times \frac{16ص - 16ص^3}{2\sqrt{8ص^2 - 4ص^4}} \Leftarrow 16ص - 16ص^3 = 0$$

$\therefore 16$ ص $(1 - ص^2) = 0 \Leftarrow ص = 0 \text{ ، } \pm 1 \Leftarrow ص = 1$

بالنظر إلى إشارة م فإن مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عند ص = 1 وهي

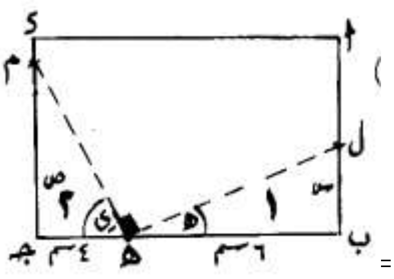
$م\Big|_{ص=1} = 4\sqrt{8 - 4} = 4\sqrt{4} = 8$ وحد مربعة .

م'	++++	----
ص		1

مثال: أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = 8سم، ب جـ = 10 سم، هـ نقطة على ب جـ بحيث ب هـ = 6سم، أخذت نقطتان ل م على أ ب، د ج على الترتيب بحيث قياس الزاوية ل هـ م هو 90° . إذا كان طول ل ب =س وطول م جـ = ص أوجد س ، ص اللتين تجعلان مساحة المضلع أ ل هـ م د أكبر ما يمكن.

الحل:

مساحة المضلع أ ل هـ م د هو مساحة المستطيل −(مساحة المثلثين (1)+(2))



$$\therefore م = 8 \times 10 - \left(\frac{1}{2}س \times 6 + \frac{1}{2} \times 4ص\right)$$

$م = 80 - (3س + 2ص)$

لكن ظا هـ = ظتا ي لأنهما متتامتان

$$\therefore \frac{س}{6} = \frac{4}{ص} \Leftarrow ص = \frac{24}{س}$$

$$م = 80 - \left(3س + \frac{48}{س}\right) \Leftarrow م' = -3 + \frac{48}{س^2} =$$

$م'' = \frac{-96}{س^3} < 0$ عند $س = 4$ $\therefore$ المساحة أكبر ما يمكن عند س = 4

وعندها فإن $ص = \frac{24}{4} = 6 \quad \therefore س = 4، ص = 6$

مثال: يتحرك جسيم وفق العلاقة ف = جا^2 4ن أوجد التسارع عند ن = $\frac{\pi}{6}$

الحل: ف = جا^2 4 ن = (جا4ن)^2

ع = ف َ = 2(جا4ن) (جتا4ن) × 4

= 4 جا 8ن

ت = ف ً = 32 جتا 8ن

ت$\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = 32 جتا $\frac{8\pi}{6}$ = 32 جتا $\frac{4}{3}\pi$ = جتا $\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

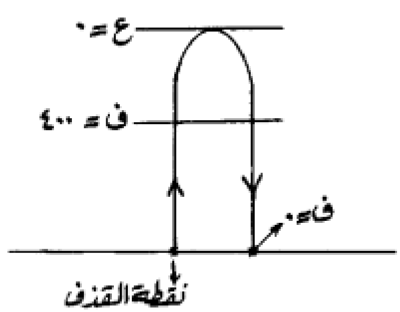
= − 32 جتا 60 = − 32 × $\frac{1}{2}$ = − 16 وحدة تسارع.

مثال: قذف جسيم رأسياً للأعلى، إذا كانت المسافة المقطوعة بالأمتار بعد (ن) ثانية هي ف = 120 ن − 5ن^2 أوجد:

1- أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم.

2- سرعة الجسيم وهو على ارتفاع 400 م.

3- سرعة الجسيم لحظة رجوعه إلى الأرض.



الحل:

1- يصل الجسيم أقصى ارتفاع عندما ع = 0

لكن ع = ف' = 120 − 10ن = 0

∴ ن = 12

∴ أقصى ارتفاع ف(12) = 120× 12 − 5× (12)^2

= 1440−720= 720 م

2- نريد ع عندما ف = 400 أي 120ن − 5ن^2 = 400

∴ 5ن^2 − 120 ن + 400 = صفر وبالقسمة على (5) فإن:

ن^2 − 24ن + 80 = صفر

(ن−4) (ن−20) = 0 ⇐ ن = 4 ، 20

ع(4) = 120 − 40 = 80 م/ث

ع(20)=120 − 10 × 20 = −80 م/ث

إذن تساوي السرعتين والاختلاف في الإشارة لانعكاس الاتجاه.

3- نريد ع عندما يصل الجسيم إلى نقطة القذف، أي عندما ف = 0

∴ 120ن − 5ن^2 = 0 ⇐ 5ن(24−ن) = 0

∴ ن = 0 ، 24

∴ السرعة عند رجوعه إلى الأرض عند ن = 24 وهي

ع(24) = 120-10×24 = -120م/ث

مثال: المستقيم 5ص-3س = 17 يمس منحنى ق(س) عند (4،1) والمستقيم 3ص = 8-2س يعامد المماس لمنحنى هـ(س) عند (2،1) أوجد:

1) (ق×هـ)َ (1)   2) $\left(\frac{هـ}{ق}\right)'(1)$

الحل:

ق′(1) = ميل المستقيم (5ص-3س=17) ⇐ ص = $\frac{3}{5}$س + $\frac{17}{5}$

∴ ق′(1) = $\frac{3}{5}$

كذلك هـ′(1) × ميل المستقيم (3ص = 8-2س) = -1

∴ هـ′(1) × $\frac{-2}{3}$ = -1 ⇐ هـ′(1) = $\frac{3}{2}$

1) (ق×هـ)′ (1) = ق(1) × هـ′(1) + هـ(1) × ق′(1)

$4 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{5} = 6 + \frac{6}{5} = 7\frac{1}{5}$

مثال: إذا رسم من النقطة (1،0) مماس لمنحنى الاقتران ص=س^3 + 3 فأوجد معادلة المماس.

الحل:

ميل المماس = ميل القاطع بين (1،0) ونقطة التماس

3س^2 = $\frac{1-(س^{3s}+3)}{0-س}$

-3س^3 = 1- س^3 - 3

-2س^3 = -2 ⇐ س = 1 ، ق′(1)=3

ق(1) = (1)^3 + 3 = 4

معادلة المماس: ص - 4 = 3(س-1)

∴ ص = 16 $\sqrt{3س}$ - $\frac{16}{6}\sqrt{3}$ π + 3 = 16 $\sqrt{3س}$ - $\frac{8}{3}$ $\sqrt{3+3}$

مثال: أوجد النقط على منحنى ص = $\frac{9س}{1-س^2}$ حيث المماس يعامد المستقيم س + 5ص = 1

الحل:

ميل المماس = ص' $= \frac{(1-\text{س}^2)\times 9-9\text{س}\times -2\text{س}}{(1-\text{س}^2)^2} = \frac{9-9\text{س}^2+18\text{س}^2}{(1-\text{س}^2)^2}$

$\therefore$ ص' $= \frac{9\text{س}^2+9}{(1-\text{س}^2)^2}$

ميل المستقيم (س+ 5ص=1) هو $\frac{-1}{5}$

لكن $\frac{9\text{س}^2+9}{(1-\text{س}^2)^2} \times -\frac{1}{5} = -1$ لأن المستقيم يعامد مماس المنحنى.

$\therefore$ $9\text{س}^2 + 9 = 5 - 10\text{س}^2 + 5\text{س}^4$ $(1-\text{س}^2)^2 = 5(1-2\text{س}^2+\text{س}^4)$

$5\text{س}^4 - 19\text{س}^2 - 4 =$ صفر

مثال: يتحرك جسيم على خط الأعداد حسب العلاقة ف = $3\text{ن}^2 - \text{ن}^3$؛ حيث ف بعده بالأمتار عن نقطة الأصل ، ن الزمن بالثواني ، جد:

1- السرعة الابتدائية للجسيم.

2- التسارع بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

3- تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته.

4- موقع الجسيم عندما تنعدم تسارعه.

5- سرعته عندما ينعدم تسارعه.

6- الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعته سالبة.

الحل:

1- السرعة الابتدائية = ف'(0)

لكن : المسافة = ف(ن) = $3\text{ن}^2 - \text{ن}^3$

السرعة = ف' (ن) = 6ن $- 3\text{ن}^2$

التسارع = ف'' (ن) = 6-6ن

$\therefore$ ف'(0) = 6(0) - 3 $(0)^2$ = صفر م / ث

2- ف'' (1) = 6-6 (1) = صفر م/ث^2

3- عندما السرعة = صفر $\Leftarrow$ ف'(ن) = 6ن - 3ن^2 = صفر

ن(6-3ن) = صفر

ن =صفر، ن = 2

$\therefore$ سرعة الجسيم تنعدم في لحظتين: ن = صفر ، ن = 2 ثانية

ف″(0) = 6-6 (0) = 6م/ث^2

ف″(2) = 6-6(2) = −6م/ث^2 (الإشارة السالبة تشير إلى التباطؤ)

4- ف″(ن) = 6-6ن = صفر ⟸ ن = 1 ثانية.

ف(1) = 3(1)^2 − (1)^2 = 3-1 = 2 م يمين نقطة الأصل.

5- ف″(ن) = 6-6ن = صفر

6 ن = 6 ⟸ ن = 1 ث

ف′(1) = 6(1) − 3(1)^2 = 6-3 = 3 م/ث

6- ف′ (ن) = 6ن − 3ن^2 = صفر

2ن −ن^2 = صفر

ن(2−ن) = صفر ⟸ ن = صفر ، ن = 6

ف′(ن)   − − − − −   + + + + + +

2   صفر

السرعة تكون سالبة في الفترة الزمنية ن < 2ث فقط.

> الفترة الزمنية ن > صفر تهمل لأن الزمن لا يكون سالباً.

المراجع

1- معجم الرياضيات المعاصرة، د. صلاح أحمد وآخرون، مؤسسة الرسالة .1983

2- د. ذيب حسين وآخر، التفاضل والتكامل 1، مكتبة الكلام، الإمارات، .1996

3- الرياضيات العامة لطلبة الاقتصاد والعلوم،د. إيلي قدسي، دار حنين، .1997

4-كامل خليفل وآخر، التفاضل والتكامل ، دار حنين – الأردن ، .1998

5- الإحصاء الوصفي والاستدلال، أ.د. أحمد عودة بن عبد المجيد عودة، مكتبة الفلاح، الإمارات، .2002

6- الطرق الإحصائية، أ.د. محمد أبو صالح، دار الياوزري، الأردن، .2002

7- الموجز في الطرق الإحصائية، أ.د. محمد أبو صالح، دار اليازوري، الأردن، .2002

8- الرياضيات العامة، بويل هويل مترجم مركز الكتب الأردني.

9- Wonnacoh, H.W. & wonnacot , R. J. (1990) Introductory statistics : New York John wlley of sons.